

СТІВЕН СТРОґАЦ

ЕКСКУРСІЯ МАТЕМАТИКОЮ

**ЯК ЧЕРЕЗ ГОТЕЛІ, РИБ, КАМІНЦІ
І ПАСАЖИРІВ ЗРОЗУМІТИ ЦЮ НАУКУ**

*Переклала з англійської
Анастасія Дудченко*

«НАШ ФОРМАТ»
Київ · 2019

[>>> Купити книгу на сайті kniga.biz.ua >>>](http://kniga.biz.ua)

ЗМІСТ

<i>Передмова</i>	7
Частина перша • Числа	
1 Від риби до нескінченності	13
2 Каміння	16
3 Ворог мого ворога	23
4 Взаємозамінність	29
5 Ділення і те, що в ньому дратує	34
6 Розміщення, розміщення, розміщення	40
Частина друга • Зв'язки	
7 Радощі числа x	49
8 Шукаємо своє коріння	54
9 Ванна моя наповнена	61
10 Відпрацьовуємо квадрати	67
11 Інструменти сили	74
Частина третя • Форми	
12 Танці квадратів	83
13 Щось із нічого	90
14 Конусова змова	97
15 Обов'язкова умова	106
16 Відпустіть уяву	113

Частина четверта • Зміни	
17 Зміна, у яку можливо повірити	123
18 Хоч пластинами, хоч кубиками	129
19 Усе про <i>e</i>	135
20 Любить, не любить	142
21 Вийдіть на світло	147
 Частина п'ята • Дані	
22 Нова нормальність	159
23 Є така ймовірність	166
24 Як розплутати всесвітнє павутиння	172
 Частина шоста • Межі можливого	
25 Найсамотніші числа	181
26 Групове мислення	189
27 Покрутити і склеїти	197
28 Мисліть глобальними категоріями	204
29 Аналізуйте це!	211
30 Готель Гільберта	220
 <i>Подяки</i>	 227
<i>Примітки</i>	230

ПЕРЕДМОВА

У мене є друг, який просто неймовірно кайфує від усякого роду наук, хоча сам художник. Щойно зустрічаємося, йому хочеться говорити тільки про останні новини в галузі психології або квантову механіку. Але коли доходить до математики, він почувається не у своїй тарілці й від цього сумує. Дивні символи відлякують його. Він навіть не знає, як їх назвати.

Узагалі, відчуженість мого друга навіть глибша. Він не розуміє, що математики роблять цілими днями або що мають на увазі, коли говорять, що теорему доведено елегантно. Інколи ми жартуємо, що я міг би просто посадовити його і навчити всього — почати з $1 + 1 = 2$ і зайти так далеко, як тільки зможемо.

Хоч би як божевільно звучало, саме це я й спробую зробити у своїй книжці. Це екскурсія азами математики: від рівня садочка до університетського — для всіх, кому хочеться отримати другий шанс розібратися з цією темою — але цього разу вже з підходом дорослої людини.

Моя книжка не для того, щоб заповнити прогалини в знаннях. Її мета — зробити так, щоб ви краще усвідомили, про що математика як наука загалом і чим вона так зачаровує тих, хто її розуміє.

Ми дізнаємося, як кидки Майкла Джордана можуть допомогти пояснити основи числення. Я покажу простий спосіб зрозуміти головне в геометрії — теорему Піфагора, і це неймовірно здивує вас. Ми спробуємо дістатися самої суті деяких загадок життя, великих і малих.

О. Джей* це зробив? Як перевертати матрац, щоб він прослужив якомога довше? Зі скількома людьми варто сходити на побачення, перш ніж зробити вибір? І ми зрозуміємо, чому одні нескінченності більші за інші.

Математика всюди, якщо знати, куди спрямовувати погляд. Ми роздивимося синусоїди в смужках зебри, зауважимо відлуння Евкліда в Декларації незалежності США, помітимо ознаки від'ємних чисел у підготовці до Першої світової війни. Також побачимо, як сьогодні в наші життя входять нові типи математики, коли ми шукаємо в інтернеті ресторани й намагаємося зрозуміти (уже не кажучи — пережити) ці страшні коливання на ринку акцій.

За збігом, який для праці про числа є просто прекрасним, ця книжка народилася в день, коли мені виповнилося п'ятдесят років. Девід Шиплі, який був редактором сторінки з листами читачів та оглядами в *New York Times*, у той великий день запросив мене на обід (хоча й не знав про те, що це мій піввіковий ювілей). Він спитав, чи хотів би я написати серію статей про математику для його читачів. Думка поділитися приємностями математики з багатьма людьми, а не тільки з моїм охочим до знань другом-художником, надзвичайно мені сподобалася.

«Ази математики» (*The Elements of Math*) з'явилися в інтернеті наприкінці січня 2010 року і виходили майже чотири місяці. У відповідь посипалися листи й коментарі від читачів усіх вікових категорій.

Писало багато студентів і вчителів, а також інших людей, яким було цікаво і які з різних причин на певному етапі математичної освіти випали з теми, але відчували, що пропустили щось важливе, й хотіли спробувати ще раз. Особливо приємно було отримувати листи від батьків, які дякували, що я допоміг їм пояснити математику їхнім дітям, а в процесі й собі самим. Навіть моїм

* О. Джей Сімпсон — професійний гравець в американський футбол. Був звинувачений у вбивстві колишньої дружини. Після гучного і тривалого судового розгляду О. Джея виправдали, але дехто досі сумнівається у справедливості вироку. — *Прим. пер.*

1 Від риби до нескінченності

Найкращий вступ до теми чисел — чітке й смішне пояснення того, чим вони є і для чого потрібні, — я бачив у випуску «Вулиці Сезам» під назвою «123 рахуй зі мною». Гамфрі, симпатичне, але не дуже розумне створіння з рожевим хутром і зеленим носом, працює в обідню зміну в готелі «Пухнасті лапки», коли йому телефонують із кімнати пінгвінів. Гамфрі уважно слухає, а потім кричить на кухню замовлення: «Риба, риба, риба, риба, риба, риба». Це підштовхує Ерні просвітити його про переваги числа шість.



"Sesame Workshop"®, "Sesame Street"® and associated characters, trademarks, and design elements are owned and licensed by Sesame Workshop. © 2011 Sesame Workshop. All Rights Reserved.

З цього прикладу діти вчаться, що числа — прекрасний спосіб сказати про довге коротко. Замість говорити слово «риба» стіль-

ки разів, скільки є пінгвінів, Гамфрі міг би використати куди потужнішу концепцію числа шість.

Однак у дорослому віці ми починаємо помічати зворотний бік чисел. Вони, звісно, прекрасно економлять час, але додають забагато абстрактності. Просто шість сприймається куди більш нематеріально, ніж шість рибин, і зрозуміло чому: це загальніше поняття. Це може бути шість чого завгодно: шість тарілок, шість пінгвінів, шість повторень слова «риба». Це те, що в них усіх є спільного.

Із такого погляду числа починають здаватися дещо таємничими. Вочевидь, вони існують десь у царстві Платона, на рівень вище нашої реальності. Звідти вони більше схожі на інші високі матерії (наприклад, на істину й справедливість) і менше — на щось звичайне й повсякденне. Якщо замислитися ще більше, то їхній філософський статус стає дедалі менш зрозумілим. Звідки взагалі взяли числа? Їх вигадало людство? Чи воно їх відкрило?

Додає гостроти й те, що числа (як і всі математичні ідеї загалом) живуть самі по собі. Ми не можемо їх контролювати. Вони існують тільки в наших головах, але щойно ми вирішимо, що саме будемо ними позначати, більше не матимемо права голосу й не впливатимемо на їхню поведінку. Числа підкорюються певним законам, і в них є свої особливості та способи поєднуватися одне з одним, але ми нічого не можемо з цим зробити — тільки дивитися й намагатися це зрозуміти. Цим вони дивно нагадують атоми й зірки — теж елементи світу, яких ми не можемо контролювати. Відмінність тільки в тому, що вони існують поза межами нашої уяви.

Цей принцип двоїстості чисел — те, що вони наполовину небесні, наполовину земні, — мабуть, найбільш парадоксальна їхня властивість, і саме вона робить їх такими корисними. Ось що мав на увазі фізик Юджин Вігнер, коли писав про «незбагненну ефективність математики в природничих науках».

Якщо вам не зрозуміло до кінця, що я маю на увазі, коли говорю про життя чисел та їхню неконтрольовану поведінку, повернімося до «Пухнастих лапок». Припустімо, що перш ніж Гамфрі

2 Каміння

В арифметики, як і в усього іншого, є серйозний і веселий боки.

Серйозний бік ми всі вивчили в школі: що робити зі стовпчиками чисел, як їх додавати, віднімати, ділити під час підрахунків у таблицях, коли треба рахувати податки чи писати звіт наприкінці року.

Цей бік арифметики важливий, прагматичний, і в ньому немає нічого радісного, принаймні для більшості людей.

Веселий бік арифметики відомий значно менше, якщо тільки ви не вчилися так, як навчаються математики на поглибленому рівні. Але по суті, нічого поглибленого в цьому немає. Це так само природно, як і дитяча цікавість.

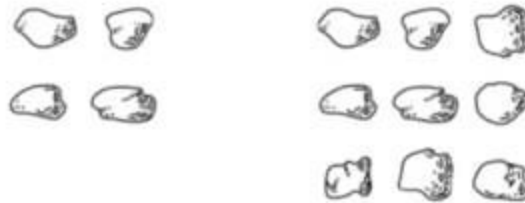
Пол Локхард у книжці «Плач математика» (A Mathematician's Lament) виступає за такий підхід до освіти, де до чисел будуть ставитися конкретніше, ніж зазвичай. Він просить нас уявити числа камінцями. Наприклад, число 6 відповідає ось такому набору:



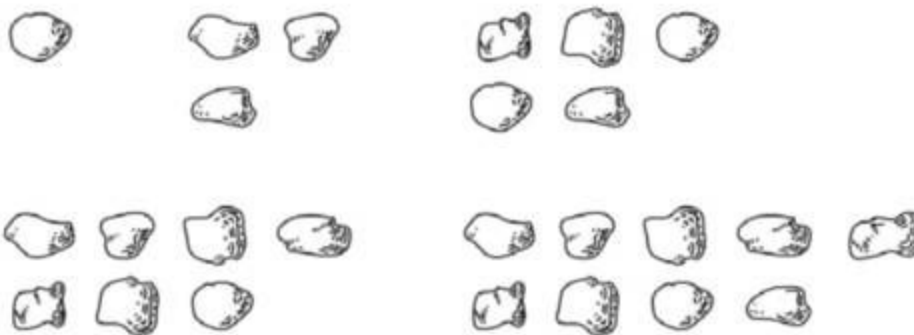
Найімовірніше, ви не бачите тут нічого вражаючого. Усе правильно: поки від чисел не починають вимагати чогось більшого,

вони мають ось такий вигляд. Наш шанс на творчість з'являється, коли ми починаємо ставити їм додаткові вимоги.

Наприклад, зосередьмося на групах, де є від одного до десяти камінців, і спитаємо, які з цих груп можна переставити так, щоб вийшов квадрат. Це можливо зробити тільки з двома з них: групою, де 4 камінці, і групою, де їх 9. Зробити це можна тому, що $4 = 2 \times 2$ і $9 = 3 \times 3$. Ми отримуємо такі числа, бо підносимо до квадрата певне число (і справді отримуємо квадратну форму):



Менше треба напружуватися, якщо наше завдання — визначити групи камінців, які можна викласти прямокутником, щоб було два однакові ряди. Це можливо за умови, якщо в нас є 2, 4, 6, 8 або 10 камінців — число має бути парне. Якщо ми спробуємо тут використати будь-яке інше число від 1 до 10 (непарне) і викласти камінці у два ряди, у нас обов'язково буде стирчати ось такий кусок.



Однак для цих чисел, які немає куди приткнути, не все втрачено. Якщо ми додамо два таких числа, їхні випуклі частини зі-

3 ВОРОГ МОГО ВОРОГА

Традиційно відразу після того, як дітей навчили додавати, їх учать віднімати. Це логічно: в обох випадках потрібно використовувати однакову інформацію про числа, тільки навпаки. І чорне мистецтво позичання, так важливе для успішного віднімання, лише трошечки вигадливіше за мистецтво перенесення в наступний розряд, його партнер у додаванні. Якщо ви вже можете підрахувати $23 + 9$, то незабаром будете готові обчислити $23 - 9$.

Однак на глибинному рівні віднімання порушує куди серйозніше питання — таке, яке в процесі додавання ніколи не виникає. Під час віднімання може з'явитися від'ємне число. Якщо я намагаюся забрати у вас 6 цукерок, але ви маєте тільки 2, я не зможу цього зробити — хіба що уявлю, ніби у вас мінус 4 цукерки, хоч би що це означало.

Віднімання змушує розширювати межі нашого уявлення про те, що таке числа. Від'ємні числа куди абстрактніші за додатні. Ви не можете побачити мінус 4 цукерки й точно не можете їх з'їсти, але спроможні їх уявити. І вам доводиться це робити, зважаючи на всі аспекти сучасного життя — від боргів та овердрафтів до розуміння температур замерзання і рівнів підземних гаражів для паркування.

Однак багато хто з нас так і не замирився з від'ємними числами. Як зазначив мій колега Енді Руїна, люди понавигадували всі можливі маленькі потішні способи обходити цей страшний знак мінус. У виписках пайових інвестиційних фондів збитки (від'ємне число) друкують червоним або ховають у дужки, тіль-

ки щоб не ставити мінус. У книжках з історії написано, що Юлій Цезар народився в 100 році до н. е., але не в -100 році. Підземні рівні в місцях для паркування часто називаються B1 і B2. Температура — один із небагатьох винятків: люди говорять, особливо тут, в Ітаці (штат Нью-Йорк), що на вулиці -5°C , хоча навіть тут скоріше скажуть: п'ять градусів нижче нуля. Щось є неприємне в знаку мінус, щось... негативне.

Найбільше, мабуть, вибиває з колії те, що від'ємне число, помножене на інше від'ємне, дає додатне. Я спробую пояснити, як це стається.

Як нам обчислити значення виразу, наприклад: -1×3 , коли ми множимо від'ємне число на додатне? Що ж, так само, як $1 \times 3 = 1 + 1 + 1$, природно для $-1 \times 3 = (-1) + (-1) + (-1)$ дати таке означення, що дорівнює -3 . Коли перевести це на гроші, усе стане очевидно: якщо ви щотижня винні мені 1 долар, то за три тижні ви опинитеся в борговій ямі на 3 долари.

Звідси вже легше буде зрозуміти, чому від'ємне число, помножене на від'ємне, дає додатне. Погляньте на цей ряд рівностей:

$$-1 \times 3 = -3$$

$$-1 \times 2 = -2$$

$$-1 \times 1 = -1$$

$$-1 \times 0 = 0$$

$$-1 \times -1 = ?$$

Тепер погляньте на числа праворуч і зауважте, як упорядкована ця послідовність: $-3, -2, -1, 0$... На кожному кроці ми додавали один до попереднього числа. То хіба ви не згодні, що за логікою наступне число має бути 1?

Це один аргумент на користь того, що $(-1) \times (-1) = 1$. Це означення цікаве тим, що в ньому дотримано правил звичайної арифметики: те, що працює для додатних чисел, так само працює для від'ємних.

Але якщо ви стріляний горобець і бувалий прагматик, то можете замислитися, чи є в цих абстракцій паралелі в реально-

4 Взаємозамінність

Приблизно кожні десять років з'являється новий підхід до математики, який приносить із собою свіжі можливості батькам почуватися невдахами. У 1960-х моїх батьків наче громом прибило, коли вони не змогли допомогти з домашнім завданням мені, другокласнику. Вони ніколи не чули про трійкову систему числення або діаграми Венна.

Тепер ролі змінилися. «Тату, можеш допомогти мені з множенням?» — запитує моя мала. «Ясна річ», — думав я, поки вона не почала хитати головою. «Ні, тату, це не так роблять. Це старомодний спосіб. Ти знаєш множення решіткою? Ні? А розподільну властивість множення відносно додавання?»

Після цих принизливих розмов мені довелося ще раз вивчати множення з нуля. І насправді, цей процес — досить тонка матерія, якщо про нього замислитися.

Візьмемо термінологію. «Сім помножити на три» — це «сім додати саме до себе три рази»? Чи «три додати саме до себе сім разів»?

У деяких мовах подвійних сенсів менше. Мій друг із Белізу зазвичай розповідав таблицю множення так: «Сім одиниць — 7, сім двійок — 14, сім трійок — 21» і так далі. У такому формулюванні зрозуміло, що перше число — те, що помножує (множник), а друге — те, яке помножують (множене).

Це так само зрозуміло, як у безсмертних рядках Лайонела Річі: «Вона один раз, двічі, тричі леді». (Пісня «Вона леді, помножена на три» хітом би ніколи не стала).

Можливо, усі ці розмови про семантику вам здаються дурними, тому що порядок, у якому стоять множники, усе одно неважливий: $7 \times 3 = 3 \times 7$. Справедливо, але тут виникає питання, яке я хотів би розглянути докладніше: цей комутативний, тобто переставний закон множення ($a \times b = b \times a$) — він справді настільки очевидний?

Я пам'ятаю, що мене в дитинстві це здивувало. Вас, можливо, теж.

Щоб знову відчувати всю магію множення, припустимо, що ви не знаєте, якому числу дорівнює 7×3 . Тож спробуйте порахувати сімками: 7, 14, 21.

Тепер поверніться в інший бік й почніть рахувати трійками: 3, 6, 9... Відчуваєте, як зростає напруга? Поки що жодне число не збігається з числами зі списку сімок, але йдемо далі... 12, 15, 18 і нарешті ось воно — 21!

Я хочу сказати, що коли ви вважаєте множення дією, яка полягає в тому, щоб багато разів порахувати одне й те саме число (інакше кажучи, кілька разів додати його), то комутативний закон здається не таким уже й прозорим.

Але він стає більш інтуїтивним, якщо уявити множення візуально. Зобразьте 7×3 крапками, розташованими як прямокутник, у сім рядів і три стовпці.



Якщо зображення перевернути, рядів стане три, а стовпців — сім. Оскільки перевертання картинки не змінило кількість крапок, то те, що $7 \times 3 = 3 \times 7$, — правильно.

5 ДІЛЕННЯ І ТЕ, ЩО В НЬОМУ ДРАТУЄ

Існує сюжетна лінія, яка проходить крізь усю арифметику, але більшість із нас не помітила її за туманом ділення у стовпчик та спільних знаменників. Це історія про пошук ще більш непостійних чисел.

Натуральні числа 1, 2, 3 і так далі — це добре, коли нам потрібно лише порахувати, додати й помножити. Але щойно ми питаємо, скільки лишається, коли все забрано, доводиться створити нове число — 0. І оскільки можна ще бути комусь винним, нам потрібні й від’ємні числа теж. Цей величезний світ чисел, які називаються цілими, так само замкнений, як і світ натуральних чисел, але сильніший, тому що має в собі віднімання.

Нова криза з’являється, коли ми намагаємося розібратися з математикою поділу. Поділити ціле число навпіл не завжди можливо, хіба що ми розширимо числовий усесвіт ще більше й додамо туди дробі. Це відношення цілих чисел, які називаються раціональними. На жаль, на цьому етапі більшість школярів упирається в математичну стіну.

У ділення та його наслідків стільки різних складнощів, але, мабуть, найбільше зводить з розуму те, скільки є способів описати частинку цілого.

Якщо ви розріжете шоколадний торт точно посередині на два рівні шматки, можете впевнено сказати, що кожен шматок — це половина торта. Або можете виразити ту саму думку дробом $\frac{1}{2}$, що буде означати «один із двох однакових шматків». (Коли ви так пишете, риска між 1 і 2 візуально нагадує: щось розділили на час-

тини). Третій спосіб — це сказати, що кожен шматок становить 50 відсотків від цілого, тобто буквально 50 частинок зі ста. І, наче цього ще не достатньо, ви можете використати десятковий дріб і сказати про кожен шматок як про 0,5 від усього торта.

Таке багатство вибору можна почасти звинуватити в тому, наскільки розгублено ми себе відчуваємо, коли потрібно мати справу з дробами, відсотками й десятковими дробами. Яскравий приклад є у фільмі «Моя ліва нога», де змальована правдива історія ірландського поета, письменника й художника Крісті Брауна. Його батьки були робітниками, крім нього в сім'ї було ще кілька дітей.

Крісті хворів на церебральний параліч, від чого практично не міг говорити чи контролювати кінцівки, окрім лівої ноги. У дитинстві з нього часто знущалися, вважаючи психічно хворим, особливо батько, якому Крісті страшенно не подобався і який жорстоко ставився до хлопчика.

Найважливіша сцена у фільмі відбувається на кухні, біля столу. Одна зі старших сестер Крісті тихо робить домашнє завдання з математики. Батько сидить поруч із нею, а Крісті, як завжди, скрутився на стільці в кутку кімнати, куди вони його вигнали. Сестра порушує тишу.

— Скільки буде 25 відсотків від четвертака? — питає вона.

Батько думає.

— Двадцять п'ять відсотків від четвертака? Уф... Тупе питання, еге ж? Двадцять п'ять відсотків — це і є четвертак. Не можна порахувати чверть від чверті.

Сестра відповідає:

— Ні, можна. Правда, Крісті?

Батько:

— Ха! Звідки йому знати?

Скорчений Крісті намагається підняти лівою ногою крейду. Він підносить її до грифельної дошки на підлозі й нашкрябує число 1, скісну риску, а потім щось незрозуміле. Це число 16, але шістка перевернута. Він злиться, витирає шістку п'ятою й намагається написати її знову, але цього разу крейда йде надто далеко й шістка перекреслюється, тому її знову неможливо розібрати.