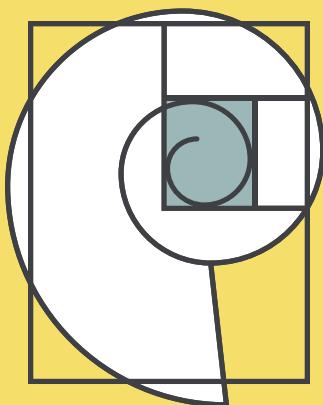
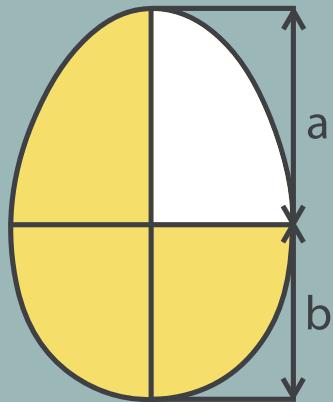


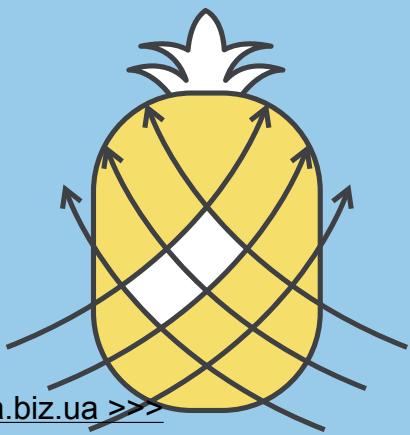
# Математическое мышление



Книга  
для родителей  
и учителей

Джо Боулер

[купить книгу на сайте kniga.biz.ua >>>](http://kniga.biz.ua)



# Оглавление

Предисловие .....	7
Сила мышления .....	11
Глава 1. Мозг и изучение математики .....	19
Глава 2. Сила ошибок и трудностей .....	33
Глава 3. Творчество и красота в математике .....	45
Глава 4. Формирование математического мышления: гибкий подход к работе с числами .....	61
Глава 5. Содержательные математические задачи .....	91
Глава 6. Математика и путь к равенству .....	135
Глава 7. От деления по уровню успеваемости к делению с ориентацией на мышление роста .....	163
Глава 8. Оценка для мышления роста .....	203
Глава 9. Преподавание математики, ориентированное на мышление роста .....	241
Источники .....	293
Приложение .....	305
Об авторе .....	346

# Предисловие

Одна из моих бывших студенток из Стэнфордского университета работает учительницей четвертого класса в районе Нью-Йорка под названием Южный Бронкс. Там много учеников из числа нацменьшинств, не имеющих полноценного доступа к образованию и плохо успевающих в школе. Ученики моей знакомой сплошь считают, что у них нет способностей к математике. Если взглянуть на их успеваемость в прошлом, может показаться, что это и правда так. Однако после года работы с этой учительницей ее класс стал лучшим четвертым классом в штате: 100% учеников сдали тест по математике, причем 90% получили высшие баллы. И это лишь один из множества примеров того, что все могут освоить математику.

Кто-то всерьез считает, что некоторые дети не способны заниматься математикой, что успеха в этой науке могут добиться только те, кого считают умными, или что детям, у которых не было надлежащих условий, слишком поздно изучать ее. Тогда вполне понятно, почему многие школьники плохо усваивают математику и ненавидят ее. Но мы обнаружили, что многие учителя даже утешают своих учеников и советуют им не беспокоиться о плохих оценках по математике, поскольку не каждому дано в ней преуспеть. Взрослые (и родители, и учителя) разрешают детям поставить

крест на математике, едва те начнут изучать ее. Неудивительно, что многие игнорируют плохие оценки по этому предмету, заявляя: «Математика — это не мое».

Почему же родители, учителя и ученики порой думают, что математика — удел избранных? Результаты недавнего исследования показывают, что это очень расхожее мнение. Исследователи опросили ученых (из американских университетов), работающих в разных областях. Их попросили оценить, насколько успех в их области зависит от врожденных способностей и от тех, которые можно развить с помощью упорного труда, целеустремленности и накопления знаний. Из всех специалистов по естественным наукам именно математики особенно часто подчеркивали роль врожденных способностей (Leslie, Cimpian, Meyer, & Freeland, 2015). Другие исследователи обнаружили, что многие преподаватели математики начинают свои курсы с разделения учащихся на тех, у кого есть способности, и тех, у кого их нет. Один преподаватель колледжа в первый же день вводного курса и вовсе сказал: «Если вам сложно, значит, вам здесь не место» (Murphy, Garcia & Zirkel, неопубл.). Эта идея передается из поколения в поколение; неудивительно, что дети и подростки боятся математики. Неудивительно и то, что при первых же трудностях они решают, будто не созданы для математики.

Но появляются и доказательства того, что большинство учеников (возможно, почти все) способны преуспевать в математике и получать удовольствие от нее. Что же предпринять, чтобы ее изучение стало доступным для всех? Как помочь всем поверить в то, что математические способности можно развить, и показать учителям подход, который позволит воплотить эту убежденность в жизнь? Именно об этом пойдет речь в данной книге.

В этой уникальной, замечательной книге Джо Боулер — опытный и глубоко эрудированный специалист — покажет учителям, как описывать математическую работу, структурировать математические задачи, направлять учеников в процессе решения задач и обеспечивать обратную связь, чтобы помочь им сформировать мышление роста и сохранить его навсегда. Джо из тех редких

выдающихся педагогов, которые не только знают секрет эффективного преподавания, но и могут поделиться им. У Джо учились тысячи преподавателей. И вот что они говорят.

В школьные годы... меня не покидало ощущение, что я ноль в математике... Не могу описать словами облегчение, которое я испытываю сейчас благодаря тому, что могу не только сам изучать математику, но и объяснить своим ученикам, что им это тоже под силу.

Вы помогли мне поразмышлять над переходом к стандартам Common Core\*, а также над тем, как помочь ученикам развить любовь и интерес к математике.

Я искала метод изучения математики, который изменил бы отношение учеников с неприязни на удовольствие... это именно то, что было мне необходимо.

Представьте себе, как ваши ученики с удовольствием погружаются в решение поистине сложных математических задач. Представьте, как они просят обсудить их ошибки перед всем классом. Представьте, как они говорят: «У меня есть способности к математике!» Эта «утопия» реализуется на практике в учебных классах по всему миру. Если вы последуете представленным в данной книге рекомендациям, то и в вашем классе это вполне может произойти.

Кэрол Дуэк,  
профессор психологии  
и автор книги «Гибкое сознание»\*\*

---

\* Common Core State Standards (единный комплекс государственных образовательных стандартов) — образовательные стандарты по математическим и языковым дисциплинам, которые внедряются во всех штатах США. *Прим. перев.*

\*\* Издана на русском языке: Дуэк К. Гибкое сознание. Новый взгляд на психологию развития взрослых и детей. М.: Мани, Иванов и Фербер, 2013.

# Сила мышления

**Я хорошо помню тот осенний день**, когда я сидела в кабинете декана в ожидании встречи, которая оказалась очень важной. Накануне я вернулась в Стэнфордский университет из Англии, где работала профессором математики как стипендиат Фонда имени Марии Кюри. Я привыкала к переходу от серого облачного неба, которое было моим неизменным спутником на протяжении трех лет пребывания на побережье Сассекса в Англии, к солнечному свету, почти всегда заливавшему кампус Стэнфорда. В тот день я вошла в кабинет декана с предвкушением: мне предстояло впервые встретиться с Кэрол Дуэйк. Я немного волновалась перед встречей со знаменитым исследователем, книги которого коренным образом изменили жизнь людей на разных континентах и работа которого побудила правительства, школы, родителей и даже ведущие спортивные команды изменить подход к жизни и обучению.

Кэрол и члены ее исследовательской команды много лет собирали данные, подтверждавшие очевидное: у каждого человека свой тип мышления, внутреннее убеждение по поводу обучения (Dweck, 2006b). Люди с мышлением роста (установкой на рост) считают, что умственные способности можно развить упорным трудом, а люди с фиксированным мышлением (установкой на данность) убеждены, что можно что-то изучить, но нельзя изменить базовый уровень интеллекта. Тип мышления крайне важен: результаты исследований свидетельствуют, что от него зависит поведение людей

в процессе обучения, а также их результаты. Когда ученики меняют установки и начинают верить, что могут подняться на более высокий уровень, они меняют путь обучения (Blackwell, Trzesniewski, & Dweck, 2007) и добиваются более высоких результатов.

В тот день я спросила Кэрол, хотела бы она поработать с учителями математики и учениками. Ведь иногда очень полезно воздействовать на мышление учеников, а учителя имеют такую возможность постоянно. Кэрол была воодушевлена и подтвердила, что математика — предмет, который больше всего нуждается в изменении мышления. Это была первая из множества наших приятных бесед; в следующие четыре года мы много работали вместе. Сейчас мы трудимся над совместными исследовательскими проектами с участием учителей, знакомим их со своими идеями и результатами исследований в рамках семинаров. Исследования мышления и математики, которыми я занималась в последние годы, помогли мне в полной мере понять необходимость развития мышления учеников в *контексте* математики, а не в целом. Ученики зачастую так не любят этот предмет, что у них формируются установки на рост в отношении чего угодно, но только не математики. Чтобы изменить такие губительные убеждения, ученикам необходимо развить *математическое мышление*. И эта книга научит вас, как помочь им.

Свойственное многим людям фиксированное мышление в отношении математики в сочетании с другими негативными представлениями о ней ведет к губительным последствиям. Именно поэтому я хочу поделиться в этой книге новыми идеями о математике и обучении. Не так давно я высказала некоторые из них во время онлайн-курса для учителей и родителей (курсы такого типа называют МООС\*), и результаты превзошли все мои ожидания (Stanford Center for Professional Development, без даты).

На курс записались более сорока тысяч слушателей, среди которых были учителя всех классов и родители. В конце курса 95% присутствовавших заявили, что благодаря новым знаниям изменят свои методы преподавания или помоют своим детям. Более 65%

---

\* МООС (massive, open, online class) — массовый открытый онлайн-курс. Прим. перев.

слушателей решили продолжить обучение (обычно на таких курсах остаются процентов пять).

Прочтя отзывы всех участников, я поняла, что математика для многих оказалась психологической травмой и что эту травму подпитывают ошибочные убеждения по поводу самой науки и своих умственных способностей. В сложности математики убеждены многие.

Впервые о травмирующем воздействии математики я узнала после публикации моей первой книги для родителей и учителей под названием «При чем здесь математика» в США и «Слон в классной комнате» в Великобритании (Boaler, 2015a). В ней подробно описаны изменения, которые необходимо внести в методы преподавания и воспитания, чтобы сделать математику более увлекательной и доступной. После выхода этого пособия меня начали приглашать на многочисленные радиошоу по обе стороны Атлантики, чтобы обсудить тему изучения математики. Это были разные программы: от утренних шоу до серьезного обсуждения с весьма вдумчивым ведущим PBS и короткого выступления во время популярного британского радиошоу под названием «Час женщин». Беседы с радиоведущими — крайне интересный опыт. Сначала я всегда рассказывала об изменениях, которые нам нужны, подчеркивая, что математика травмирует многих. Это как будто помогало ведущим расслабиться, открыться и поделиться своими историями о том же самом. Многие интервью превращались в подобие сеансов психотерапии: очень квалифицированные и компетентные специалисты говорили о своих страданиях при изучении математики, причиной которых обычно было то, что сказал или сделал учитель. Я до сих пор помню, как Китти Данн из Висконсина рассказала, что название учебника по алгебре навсегда связалось у нее с негативными эмоциями. Радиоведущая BBC Джейн Гарви (поразительная женщина, которой я восхищаюсь) поведала, что боялась брать у меня интервью и что она уже рассказала двум дочерям о своей ужасной успеваемости по математике в школе (а этого ни в коем случае нельзя делать — но об этом чуть позже). Такая сила негативных эмоций по поводу математики не редкость. Эта дисциплина больше, чем любая другая, сокрушает дух учеников так, что

даже взрослыми они не могут забыть свои неудачи. Многие ученики решают, что не способны усвоить математику, и питают отвращение к ней на всю жизнь.

И это проблема не только гуманитариев. Мне довелось встретиться с Вивьен Перри. Вивьен — ведущий ученый Англии; не так давно она получила звание офицера ордена Британской империи — самую высокую награду, которую вручает королева. У Вивьен длинный список достижений, в частности работа на посту вице-председателя совета Университетского колледжа Лондона, члена Совета по исследованиям в области медицины, а также ведущей научных телевизионных программ BBC. При всем этом она открыто, во всеуслышание говорит о своем парализующем страхе перед математикой. По словам Вивьен, она даже не может вычислить проценты, когда ей необходимо заполнить налоговые декларации. За несколько месяцев до отъезда из Великобритании и возвращения в Стэнфордский университет я должна была прочесть доклад в Королевском институте в Лондоне. Это огромная честь — выступать в одном из старейших и самых уважаемых британских институтов, поставившем перед собой достойную цель приобщения широкого круга людей к науке. Рождественские лекции, начало которым положил в 1825 году Майкл Фарадей, проводятся в Великобритании каждый год и транслируются по телевидению. Лекции читают выдающиеся ученые, рассказывая о своей работе широкой публике. Я попросила Вивьен представить меня в Королевском институте. И она рассказала присутствующим, как в детстве учительница математики миссис Гласс поставила ее в угол за то, что она не смогла повторить наизусть таблицу умножения на семь. Затем Вивьен рассмешила собравшихся, упомянув, что, когда она поделилась этой историей на BBC, шесть человек позвонили и спросили, не идет ли речь о школе Хоксбери. Вивьен подтвердила их догадку.

К счастью, такие жесткие методы преподавания больше почти не применяются. Меня всегда вдохновляет самоотверженность и ответственность большинства учителей математики, с которыми я работаю. Но многие ученики продолжают терять энтузиазм. Процесс в любой момент можно обратить вспять, но ученики по-

прежнему получают много косвенных сигналов по поводу своих способностей: в контексте вопросов, над которыми они работают на уроках, обратной связи, способов деления на группы и прочее.

Вивьен убеждена, что страдает заболеванием мозга под названием дискалькулия. Но мы уже знаем, что единичное событие или единичный сигнал может изменить все в жизни (Cohen & Garcia, 2014). Вероятно, именно негативный опыт в математике лежит в основе тревоги, с которой она борется теперь каждый день. К счастью, Вивьен добилась успеха (даже в области точных наук). Однако большинству людей повезло меньше, и губительный опыт неудач, который они получили в раннем возрасте, закрыл для них многие двери на всю оставшуюся жизнь.

Изучать математику очень важно. Результаты научных исследований свидетельствуют: чем выше математических дисциплин изучают дети, тем выше их заработка через десять лет после окончания средней школы; причем «продвинутые» курсы обеспечивают повышение заработной платы на 19,5% (Rose & Betts, 2004). В ходе этих исследований было установлено, что те, кто изучал высшую математику, осваивают разные методы работы и мышления, повышающие их эффективность. Ученики, изучающие сложные математические дисциплины, лучше ориентируются в математических ситуациях; на работе их продвигают на более ответственные и высокооплачиваемые должности по сравнению с теми, кто не изучал математику на таком уровне (Rose & Betts, 2004). Во время исследования в английских школах я выяснила, что такие ученики получают повышение и более высокооплачиваемую работу, потому что в средней школе они изучали математику в рамках проектно-ориентированного подхода (Boaler, 2005).

Есть много книг, посвященных тому, как преодолеть страх математики (Tobias, 1978). Но негативное отношение к этой дисциплине объясняется не только пагубными методами преподавания. Существует очень мощная идея: якобы не все могут добиться успеха в этой науке, она «дар» для избранных.

Откуда же пошла эта губительная идея? Уж точно не из стран типа Японии, занимающих первые места в мире по уровню знания

математики. Две мои дочери на момент написания книги учились в третьем и шестом классах средней школы в Калифорнии. И я имею сомнительное удовольствие регулярно просматривать телепередачи для подростков. Весьма познавательно (и тревожно): не проходит ни дня, чтобы математику не подавали там в негативном свете. О ней говорят как о трудном, неинтересном и недоступном предмете, который предназначен только для «заучек», а не для неординарных, интересных людей. И уж точно она не для девочек. Неудивительно, что многие школьники теряют интерес к этому предмету и считают, что не могут успешно освоить его.

Мысль о том, что математика доступна только избранным, глубоко укоренилась в психике большинства. Причем против других дисциплин таких предубеждений нет. Многие скажут, что математика выделяется на общем фоне, поскольку в ней ответы могут быть только правильными и неправильными. Но это ошибка. В математике есть место творчеству и интерпретациям. Это широкая и многоплановая дисциплина, которая требует логических рассуждений, изобретательности, установления связей и интерпретации методов. Это совокупность идей, позволяющих пролить свет на устройство мира. Это наука, которая постоянно меняется. К любой математической задаче можно подойти разными способами, и воспринимать математику тоже можно по-разному. Когда произойдут перемены, люди начнут интересоваться математикой и любить ее.

Вот еще одна распространенная ошибка: якобы заниматься математикой могут только самые умные. И поэтому неудачи в этой области оказывают на учеников особенно тягостное воздействие: они приходят к выводу, что глупы и не способны добиться серьезного успеха в жизни. Нужно развеять этот миф.

Пока я писала книгу, появились первые знаки того, что мир начинает ценить и понимать важность гибкого мышления. Книга Кэрол Дуэк переведена более чем на 20 языков (Дуэк, 2013), интерес к теме мышления растет. И идеи Кэрол распространяются на восприятие математики. Преподаватели этой дисциплины и родители, занимающиеся с детьми дома, могут радикально изменить представления, опыт и шансы учеников, если применят к изучению математики подход, основанный на мышлении роста. Общее

воздействие на установки поможет изменить мышление. Но стоит лишь вернуться к прежним методам, и установка роста постепенно утратит свою силу. Я говорю преподавателям и родителям, я подчеркиваю и в этой книге: нужно сосредоточиться на математических вопросах и заданиях, над которыми работают ученики. Я опишу методы поощрения и оценки учеников, способы разделения на группы в классах, методы работы над ошибками, правила работы на уроке, сигналы в отношении математики, которые мы можем подавать ученикам, и стратегии ее изучения, которые легко освоить, — в общем, все аспекты преподавания и изучения этого предмета. Я рада поделиться своими идеями и убеждена, что они помогут вам и всем, с кем вы занимаетесь математикой.

В главе 1 представлены интересные и важные идеи, рожденные в рамках исследований за последние годы. Далее основное внимание уделяется стратегиям, которые можно использовать на уроках математики и дома, чтобы реализовать на практике идеи первых двух глав. Я настоятельно рекомендую прочесть все главы: переход непосредственно к стратегиям не принесет пользы без глубокого понимания базовых идей.

За несколько месяцев после того, как состоялся мой онлайн-курс МООС для учителей и родителей, я получила тысячи бумажных и электронных писем и других сообщений. Люди рассказывали, что они изменили на уроках и дома и как это повлияло на учеников. Небольшие вроде бы перемены в преподавании и воспитании способны изменить отношение детей к математике: ведь новые знания о головном мозге, мышлении и изучении этого предмета поистине революционны. В этой книге идет речь о формировании *математического мышления* в рамках нового подхода к преподаванию и воспитанию, суть которого сводится к развитию, инновациям, творчеству и реализации математического потенциала. Спасибо, что присоединились ко мне и встали на путь, который навсегда изменит ваши отношения и отношения ваших учеников с математикой.

# Глава 1

## Мозг и изучение математики

*За прошедшее десятилетие* появилось множество технологий, которые обеспечили новые возможности изучения функций разума и мозга. Сейчас ученые могут наблюдать, как дети и взрослые работают над решением математических задач, и регистрировать активность их головного мозга; отслеживать процесс его роста и дегенерации, а также влияние различных эмоциональных состояний на его активность. В последние годы сформировалась область исследований, которая изучает так называемую пластичность мозга. Результаты в этой области поразили ученых. Раньше считалось, что мозг, данный человеку от рождения, нельзя изменить, но теперь эта гипотеза решительно опровергнута. Многие исследования продемонстрировали невероятную способность головного мозга расти и меняться за достаточно короткий период (Abiola & Dhindsa, 2011; Maguire, Woollett, & Spiers, 2006; Woollett & Maguire, 2011).

Когда мы узнаем новую идею, в нашем мозге возникает электрический сигнал, который проходит через синапсы и соединяет различные участки мозга.

Если вы глубоко изучаете какой-то предмет, активность синапсов создает устойчивые связи в головном мозге, формируя структурные пути. Но, если вы ознакомитесь с идеей только раз или изучите ее поверхностно, синаптические связи могут растянуть, как следы на песке. Синапсы активизируются в процессе

обучения, но он происходит не только на уроках или во время чтения книг. Они возбуждаются, когда мы разговариваем, играем, собираем конструктор и занимаемся многими другими видами деятельности.

Ряд открытых, под влиянием которых ученые изменили свое мнение о способностях и обучении, были сделаны в процессе исследований роста головного мозга, зафиксированного у водителей лондонского такси. Я родом из Англии и много раз ездила в Лондоне на такси. У меня остались теплые детские воспоминания об увлекательных однодневных путешествиях в Лондон с семьей — мы жили в нескольких часах езды от города. Потом я учились и работала в Королевском колледже Лондонского университета и тогда гораздо чаще совершала поездки по городу на такси. В Лондоне много таксомоторных компаний, но истинная «королева» — Black Taxi, или Black Cab.

В ходе большинства поездок по Лондону на такси Black Cab я и не задумывалась, насколько высок уровень квалификации водителей. Оказывается, чтобы стать водителем Black Cab, кандидатам необходимо пройти курс обучения продолжительностью от двух до четырех лет, в течение которого они должны запомнить 25 тысяч улиц и 20 тысяч объектов в радиусе 40 километров от перекрестка Чаринг-Кросс. Научиться ориентироваться в Лондоне гораздо сложнее, чем в большинстве американских городов: сеть лондонских улиц не имеет четкой структуры и включает тысячи переплетающихся друг с другом, взаимосвязанных улиц.

В конце обучения водители Black Cab сдают тест по курсу, названный просто и элегантно — «Знание». Если во время поездки в лондонском Black Cab вы спросите водителя об этом курсе, он с удовольствием расскажет вам, насколько труден как сам тест, так и весь процесс обучения. «Знание» известен как один из самых сложных в мире курсов; в среднем кандидаты сдают экзамен с двенадцатого раза.

В первое десятилетие XXI века ученые решили исследовать водителей Black Cab на предмет изменений, которые происходят в их головном мозге в процессе обучения пространственной ориентации. Но они не ожидали настолько впечатляющих результатов.

Оказалось, что к концу периода обучения гиппокамп водителей такси существенно увеличился (Maguire et al., 2006; Woollett & Maguire, 2011). Гиппокамп — область мозга, отвечающая за хранение и обработку пространственной информации.

В ходе других исследований ученые сравнили рост мозга водителей Black Cab с ростом мозга водителей лондонских автобусов, которые изучают только простые единичные маршруты. По результатам исследования было установлено, что у этих водителей не наблюдается такого роста головного мозга (Maguire et al., 2006). Это подтвердило вывод ученых о том, что именно необычайно сложное обучение водителей такси становится причиной поразительного роста их головного мозга. В ходе дальнейших исследований ученые обнаружили, что после выхода водителей Black Cab на пенсию их гиппокамп снова уменьшается в объеме (Woollett & Maguire, 2011).

Многочисленные исследования с участием водителей Black Cab (Maguire et al., 2006; Woollett & Maguire, 2011) продемонстрировали уровень гибкости, или пластичности головного мозга, поразивший ученых. Ранее они считали, что такое невозможно. Все эти открытия привели к тому, что научный мир изменил свое мнение об обучении, способностях и возможностях изменений и роста мозга.

Примерно в то же время, когда проводились исследования с участием водителей Black Cab, произошло событие, которое еще больше потрясло научный мир. У девятилетней Кэмерон Мотт были припадки, которые медики не могли контролировать. Лечащий врач девочки Джордж Джелло предложил радикальную меру. Он пришел к выводу, что необходимо удалить половину ее головного мозга: все левое полушарие. Это была революционная операция, которая прошла успешно. Несколько дней после операции Кэмерон была парализована. Врачи считали, что она будет оставаться в таком состоянии много лет. Но прошло несколько недель, а потом и месяцев — и девочка поразила врачей восстановлением функций. Это могло значить только одно: в правом полушарии головного мозга сформировались связи, необходимые для выполнения функций левого полушария. Врачи отнесли это на счет

невероятной пластичности головного мозга и могли объяснить случившееся только тем, что на самом деле произошла регенерация мозга девочки. Процесс формирования нового мозга проходил быстрее, чем врачи могли себе представить. Сейчас Кэмерон бегает и играет вместе с другими детьми, а легкая хромота — единственный признак утраты значительной части мозга\*.

Новые данные о том, что головной мозг может расти, адаптироваться и меняться, потрясли научный мир и повлекли множество новых исследований и обучения с использованием новых технологий и оборудования для сканирования мозга. В ходе исследования, крайне интересного для работников сферы образования, специалисты Национального института психического здоровья давали участникам упражнение, над которым те должны были работать по 10 минут каждый день на протяжении трех недель. Затем исследователи сравнили мозг тех, кто выполнял упражнение, с мозгом тех, кто этого не делал. Выяснилось, что в головном мозге участников исследования, которые работали над упражнением, произошли структурные изменения. Он «перепрограммировался» и увеличился в объеме под воздействием 10-минутного задания, которое они выполняли каждый день на протяжении 15 дней (Karni et al., 1998). Эти результаты должны подтолкнуть педагогов к отказу от устоявшихся представлений о мозге и обучении, которые сейчас распространены в школе: мол, ученики бывают умными и глупыми, сообразительными и бестолковыми. Если мозг способен измениться за три недели, представьте себе, что может произойти за год изучения математики, если ученики получают нужный материал по этому предмету и позитивные отклики о своих потенциале и способностях. В главе 5 мы поговорим о структуре лучших математических задач, над которыми должны работать ученики, чтобы их мозг развивался.

Новые данные, полученные по результатам исследований головного мозга, свидетельствуют: при грамотном преподавании и наличии толковой обратной связи каждый ученик может успешно

---

\* Подробнее см.: <http://www.today.com/id/36032653/ns/today-health/t/meet-girl-half-brain/#.UeGbixbfvCE>.

освоить математику и добиться самого высокого уровня успеваемости в школе. У некоторых детей действительно есть специфические образовательные потребности, затрудняющие изучение математики. Но подавляющему большинству (95%) доступны все уровни школьного курса. Родители и учителя должны знать это. Когда я рассказываю об этих результатах исследований во время семинаров и презентаций, это вдохновляет и стимулирует большинство учителей. Но не всех. Недавно я работала с группой учителей, и у одного преподавателя математики из средней школы эта идея вызвала явное беспокойство. Он сказал: «Вы же не будете утверждать, что любой шестиклассник моей школы сможет изучать дифференциальное и интегральное исчисление в двенадцатом классе?» Я ответила: «Буду». Тот учитель был по-настоящему встревожен этой идеей — хотя, надо отдать ему должное, он не отверг ее сразу. Некоторым трудно принять тот факт, что кто угодно может освоить математику на достаточно высоком уровне, особенно если они много лет решали, кто может заниматься ею, а кто нет, и обучали детей в соответствии с этим убеждением. Безусловно, с самого рождения многие дети получили достаточно впечатлений и сигналов в отношении математики, из-за которых оказались в числе отстающих и могли дойти до шестого класса с меньшим объемом математических знаний по сравнению с другими учениками. Но это не значит, что такие ученики не могут ускорить свое развитие и выйти на более высокий уровень. Они способны сделать это при условии качественного преподавания и поддержки, которой заслуживают все дети.

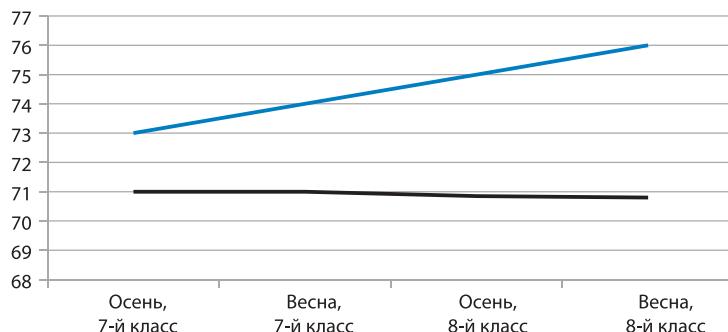
Меня часто спрашивают, действительно ли я думаю, что всем от рождения дан одинаковый мозг. Нет, я такого не утверждаю. Я говорю о том, что врожденные особенности детей далеко не так важны, как рост их мозга на протяжении всей жизни. Многие твердо убеждены, что наш потенциал зависит от того, что нам дано от рождения, и приводят в пример известных людей, которых считают гениями: Альберта Эйнштейна или Людвига ван Бетховена. Но сейчас ученым известно, что опыт обучения, который мы накапливаем с рождения, затмевает любые врожденные особенности мозга (Wexler in Thompson, 2014). Синапсы возбуждаются

в головном мозге каждую секунду, и ученики, которые росли в стимулирующей среде и получали сигналы о мышлении роста, могут всё. Особенности мозга порой с самого начала дают некоторым людям более благоприятные условия, но лишь немногим природой дано то, что на всю жизнь обеспечит им преимущество. Именно те люди, которых принято считать гениальными от рождения, часто подчеркивают, как упорно они трудились и сколько ошибок совершили. Эйнштейн — пожалуй, самый известный ученый из тех, кого считают гениями, — научился читать только в девять лет и часто говорил, что его достижения рождены ошибками, которые он совершил, и упорством, которое он проявлял. Он относился к работе и жизни как человек с мышлением роста. Многие научные данные подтверждают, что основой успехов или неудач становятся не врожденные умственные способности, а подход к жизни, обратная связь и имеющиеся возможности обучения. Самые благоприятные условия формируются тогда, когда ученики верят в себя. В школе слишком многие сталкиваются с трудностями в изучении математики, получая такие сигналы о своем потенциале, которые заставляют их поверить в то, что они хуже остальных или у них нет таких способностей, как у других. Представленная в данной книге информация поможет и учителям, и родителям внушить детям уверенность в себе, которая им необходима, и вывести их на путь, который приведет их к математическому мышлению, каким бы ни был их предыдущий опыт. Этот путь подразумевает изменение отношения учеников к себе и смену подхода к изучению математики.

Да, мозг у всех разный. Но, в отличие от многих, я считаю, что математического склада ума или математического таланта не существует. Никто не рождается ни со знанием математики, ни без способности изучать ее. К сожалению, идеи об одаренности очень живучи. Не так давно исследователи проанализировали, насколько преподаватели высших учебных заведений убеждены в том, что для изучения их предметов (тридцать в общей сложности) необходима одаренность, и пришли к поразительным выводам (Leslie, Cimpian, Meyer, & Freeland, 2015). Именно преподаватели математики более всех убеждены в том, что их предмет

доступен не каждому. Кроме того, исследователи пришли к выводу, что чем больше в той или иной области ценится одаренность, тем меньше в ней женщин со степенью доктора наук, а также что есть корреляция между убеждениями, свойственными соответствующей области, и представленностью женщин в ней. Меньшее число женщин в тех областях, где сильна вера в природную одаренность, объясняется тем, что до сих пор широко распространены стереотипы о том, кто действительно может заниматься математикой (подробнее об этом см. в главе 6). Нам стоит придерживаться более справедливых и просвещенных взглядов на изучение математики в своих беседах и занятиях с учениками. Работа с учениками должна опираться на новую науку о мозге; нам стоит внушать всем мысль о том, что освоить математику может каждый, а не только тот, кого считают одаренным. Это откроет путь к иному будущему — в котором психологическая травма в связи с изучением математики останется в прошлом, а ученики из разных слоев общества получат доступ к возможностям качественного ее изучения.

В ходе исследований Кэрол Дуэк и ее коллег было установлено, что примерно у 40% детей отмечается пагубное фиксированное мышление и они убеждены, будто интеллект — дар, который «либо есть, либо нет». 40% учеников свойственно мышление роста, а оставшиеся 20% демонстрируют признаки обоих типов мышления (Dweck, 2006b). Ученики с фиксированным мышлением чаще легко сдаются, а ученики с мышлением роста продолжают трудиться, даже если им приходится постоянно выполнять нелегкую работу, демонстрируя при этом качество, которое Анджела Дакворт называет твердостью характера (Duckworth & Quinn, 2009). В ходе одного исследования учеников седьмого класса был проведен опрос для определения типа мышления. Потом исследователи на протяжении двух лет отслеживали успеваемость этих учеников по математике. Результаты оказались впечатляющими: успеваемость учеников с фиксированным мышлением оставалась на прежнем уровне, а у учеников с мышлением роста она постоянно повышалась (Blackwell et al., 2007; рис. 1.1).



**Рис. 1.1.** Ученики с мышлением роста опережают в математике учеников с фиксированным мышлением

Источник: *Blackwell et al., 2007.*

В ходе других исследований ученые показали, что фиксированное мышление у детей (и взрослых) может трансформироваться в мышление роста. Когда это происходит, их подход к обучению становится гораздо более позитивным и успешным (Blackwell et al., 2007). Кроме того, получены новые данные (подробнее см. главу 2) о том, что, когда ученики с мышлением роста совершают ошибки, активность их мозга более позитивна; при этом у них активизируется больше участков мозга, они уделяют больше внимания ошибкам и исправляют их (Moser, Schroder, Heeter, Moran, & Lee, 2011).

Мне не нужны были другие доказательства важности помощи детям (и взрослым) в развитии мышления роста, в частности в математике. Но недавно мне довелось работать в Париже вместе с членами команды PISA\* (программы Организации экономического сотрудничества и развития, ОЭСР) над анализом поразительного объема данных о 13 миллионах учащихся из разных стран. Команда PISA проводит международные тесты раз в четыре года, а их результаты публикуются информационными агентствами во всем мире. В США результаты тестов часто вызывают тревогу — и не без оснований. По итогам последнего (на момент написания книги) теста США

\* PISA (Program for International Student Assessment) — международная программа по оценке образовательных достижений учащихся. *Прим. перев.*

заняли 36-е место по уровню знаний в математике среди 65 стран — членов ОЭСР (PISA, 2012). Подобно многим другим итогам, этот результат говорит о наличии настоятельной потребности в реформировании преподавания и изучения математики в США. Однако команда PISA занимается не только организацией тестов по математике, но и проводит опросы учащихся с целью сбора информации об их представлениях и убеждениях в отношении математики и своего мышления. Я получила предложение поработать со специалистами PISA, после того как некоторые члены этой команды прошли онлайн-курс, который я проводила прошлым летом. Одним из этих людей был Пабло Сойдо — учитывый испанец, который глубоко анализирует вопросы изучения математики и имеет богатый опыт работы с огромными объемами данных. Пабло — аналитик PISA. Проанализировав имеющиеся данные, мы с ним обнаружили нечто поразительное: именно учащиеся с мышлением роста добиваются самых высоких результатов в математике и опережают других более чем на год изучения математики (рис. 1.2).



**Рис. 1.2.** Мысление и математика

Источник: PISA, 2012.

Фиксированное мышление (когда ученики считают, что они либо умные, либо нет), которое приводит к пагубным последствиям, свойственно ученикам всех уровней успеваемости. Но самый тяжелый вред оно наносит девочкам с высоким уровнем успеваемости (Dweck, 2006а). Как оказалось, губительна даже

уверенность в собственных умственных способностях (одна из установок на данность). Ведь ученики с фиксированным мышлением менее склонны пробовать свои силы в более тяжелой работе или изучении более сложного предмета: они боятся, что совершают ошибку и их уже не будут считать умными. Ученики с мышлением роста берутся за трудную работу и воспринимают ошибки как вызовы и стимул прилагать еще больше усилий. Высокая распространенность фиксированного мышления среди девочек — одна из причин того, что они не стремятся изучать технические дисциплины STEM\*. Это не только ограничивает их жизненные шансы, но и обедняет дисциплины STEM, которые нуждаются в мышлении и включении девушек и женщин (Boaler, 2014a).

В США у многих людей сформировалось фиксированное мышление, в частности из-за того, как родители и учителя хвалят их. Когда ученики получают похвалу за какое-то качество (например, интеллект, если они хорошо справились с каким-то заданием), поначалу они чувствуют себя хорошо. Но когда они позже сталкиваются с неудачами (а они бывают у каждого), для них это означает, что на самом деле они не так уж умны. В ходе одного из недавних исследований было обнаружено, что от того, как родители хвалят детей от момента рождения до трех лет, зависит их мышление через пять лет (Gunderson et al., 2013). Влияние похвалы, которую получают ученики, может быть настолько сильным, что это сразу оказывается на их поведении. В ходе одного из исследований Кэрол Дуэйк 400 ученикам пятого класса предложили пройти небольшой легкий тест, с которым почти все справились хорошо. Затем половину детей похвалили за интеллект («Ты такой умный!»), а другую — за усилия при выполнении задания («Ты работал очень усердно!»). После этого детям предложили пройти еще один тест, дав им возможность выбрать между простым вариантом, с которым они могли легко справиться, и более сложным, в котором они могли сделать ошибку. 90% учеников, которых хвалили за усилия, выбрали более трудный тест. Большинство же тех,

---

\* STEM (science, technology, engineering, and math) — естественные науки, технологии, инженерное дело, математика. Прим. перев.

кого хвалили за интеллект, предпочли легкий вариант (Mueller & Dweck, 1998).

Похвала доставляет удовольствие. Но когда человека хвалят за его личные качества («Ты такой умный!»), а не за то, что он сделал («Отличная работа!»), у него создается впечатление, что его способности неизменны. Сказать ученику, что он умный, — значит обречь его на проблемы в будущем. Когда в школе и в жизни ученики терпят неудачу в решении многих задач (что, повторю, вполне естественно), они оценивают себя, решая, умны они или нет. Вместо того чтобы хвалить учеников за умственные способности или другое личное качество, лучше сказать так: «Замечательно, что ты этому научился» или «Ты действительно хорошо все продумал».

В американской системе образования распространено представление, что способности некоторых учеников не позволяют им изучать математику определенного уровня сложности. Не так давно я столкнулась с шокирующим фактом: несколько учителей математики в старших классах написали в школьный совет письмо, где утверждали, что некоторые ученики не способны сдать тест по алгебре второго уровня; в частности, что нуждаются в упрощении программы некоторые малообеспеченные ученики из числа нацименьшинств. Письмо было опубликовано в местных газетах, а законодательное собрание штата использовало его в качестве примера, подтверждающего необходимость создания чартерных школ\* (Noguchi, 2012). Письмо вызвало всеобщий шок, но, к сожалению, мнение о том, что некоторые ученики не способны освоить высшую математику, свойственно многим. Такой ограниченный и расистский подход может принимать разные формы и порой применяется с искренней заботой об учениках. Ведь многие считают, что дети готовы к изучению определенных математических тем только на определенной стадии своего развития. Но на самом деле готовность учеников зависит от накопленных ими практических знаний, а если они не готовы к изучению тех или иных тем,

\* Чартерная школа — бесплатная муниципальная школа, работающая по контракту: частично она финансируется государством, а частично — за счет частных средств. *Прим. ред.*

то могут подготовиться, получив необходимый опыт и поддержку и развив мышление роста. Не существует предопределенных темпов изучения математики, поэтому нельзя утверждать, что она недоступна тем, кто не достиг какого-то уровня возрастной или эмоциональной зрелости. Могут быть не готовы разве что те, кто пока не освоил необходимые базовые понятия. Остальное сформируется в процессе обучения.

Для многих из нас понимание важности математического мышления и формирование концепции и стратегий изменения мышления учеников подразумевает более тщательный подход к собственному обучению и отношениям с математикой. Многие учителя начальной школы, с которыми я работала (некоторые из них слушали мой онлайн-курс), рассказывали, что идеи о мозге, потенциале и мышлении роста, с которыми я их познакомила, полностью изменили их жизнь. Под влиянием этих идей у них сформировалось мышление роста в отношении математики, они начали заниматься ею с уверенностью и энтузиазмом и прививать такое отношение своим ученикам. Это особенно важно для учителей начальной школы, поскольку на определенном этапе многим из них говорили, что они не способны освоить математику или что эта дисциплина «не для них». Многие преподаватели математики сами боятся этой дисциплины. Результаты исследований, о которых я им рассказала, помогли им избавиться от страха и встать на другой путь. В ходе важного исследования Сайен Бейлок и ее коллеги пришли к выводу о наличии зависимости между уровнем негативных эмоций, которые учителя начальной школы испытывают по отношению к математике, и уровнем успеваемости девочек из их класса, но не мальчиков (Beilock, Gunderson, Ramirez, & Levine, 2009). Вероятно, это гендерное различие объясняется тем, что девочки отождествляют себя с учительницами, особенно в начальной школе. Они быстро подхватывают негативные сигналы в отношении математики, которые учителя зачастую подают из добрых побуждений, например: «Я знаю, что это очень трудно, но давай попробуем» или «Я никогда не любила математику». Кроме того, это исследование подчеркивает связь между сигналами, которые подают учителя, и успеваемостью их учеников.

Каков бы ни был уровень вашего мышления и знаний в этой области, я надеюсь, что представленные в этой книге данные и идеи помогут вам и вашим ученикам воспринимать математику (на любом уровне) как предмет, доступный для понимания и приносящий истинное удовольствие. В главах 2–8 приведено много стратегий формирования мышления роста на занятиях математикой в школе и дома, которые я собрала за долгие годы исследований и практической работы в школах. Они помогут вам дать ученикам такой опыт изучения математики, который позволит им развить сильное *математическое мышление*.