

Зміст

<i>Вступ</i>	7
1 Нескінченність	25
2 Людина, що приборкала нескінченність	51
3 Відкриваємо закони руху	84
4 Світанок диференціального числення	115
5 Перехрестя	150
6 Словник змін	167
7 Таємний фонтан	194
8 Фікції	227
9 Логічний Всесвіт	255
10 Як з'являються хвилі	278
11 Майбутнє матаналізу	300
На завершення	326
<i>Подяки</i>	333
<i>Бібліографія</i>	336
<i>Примітки</i>	346

Купити книгу на сайті kniga.biz.ua >>>

Вступ

Без математичного аналізу в нас не було би мобільних телефонів, комп'ютерів і мікрохвильовок. Не було би радіо. І телебачення. Майбутні мами не змогли би скористатися УЗД, а заблукалі мандрівники — GPS. Ми не розібрали б на частинки атом, не розгадали би геном людини, не відправили би астронавтів на Місяць. Можливо, не було би навіть американської Декларації незалежності.

Те, що загадкова галузь математики назавжди змінила світ, — цікавий історичний момент. Як так могло статися, що теорія, яка від самого початку була про форми, — переформатувала саму цивілізацію?

Найкраще на це питання відповів фізик Річард Фейнман, коли обговорював з письменником Германом Воуком Мангеттенський проект. Воук хотів написати великий роман про Другу світову і вивчав цю тему, тож приїхав у Калтех поговорити з фізиками, які працювали над бомбою. Фейнман був одним із них. Після інтерв'ю, коли вони вже прощалися, Фейнман спитав Воука, чи розбирається той у матаналізі. Воук визнав: «Ні, зовсім не знаю». «Раджу вивчити, — сказав Фейнман. — Це Божа мова»¹.

Ніхто не розуміє чому, але Всесвіт — глибоко математична річ. Може, таким його задумав Бог. А можливо, Всесвіт, у якому ми живемо, може бути тільки таким, бо істот, які досить розумні, щоб ставити питання, нематематичний Всесвіт утримувати не здатен. У кожному разі, сам факт, що Всесвіт підвладний законам природи, які завжди можна виразити мовою матаналізу — з реченнями

у вигляді диференціальних рівнянь, — загадковий і неймовірний. Такі рівняння описують різницю між тим, якою річ була просто зараз, і тим, якою стане в наступну мить; або між чимось, що розташоване просто тут, і чимось нескінченно близьким до нього. Дещо залежить від того, про яку саме частину природи йде мова, але структура законів завжди однакова. Інакше кажучи, схоже, що у Всесвіті існує щось типу коду, операційна система, яка лежить в основі всього — у кожній секунді, у кожному міліметрі. Матаналіз спирається на цей порядок і виражає його.

Першим цю таємницю Всесвіту помітив Ісаак Ньютон. Він звернув увагу, що орбіти планет, ритм хвиль і траєкторії польоту гарматних ядер можна описати, пояснити і спрогнозувати за допомогою маленького набору диференціальних рівнянь. Сьогодні ми називаємо їх просто «законами Ньютона». Відтоді ми вже розібралися, що ті самі правила спрацювують завжди, коли ми відкриваємо нову частину Всесвіту. Колись це були просто земля, вода, вогонь і повітря, тепер це електрони, кварки, чорні діри й суперструни. Уся нежива природа підвладна диференціальним рівнянням. Б'юся об заклад, саме це Фейнман і мав на увазі, коли говорив, що матаналіз — Божа мова. Якщо й можна щось назвати таємницею Всесвіту — то це матаналіз.

Люди випадково відкрили цю дивну мову — спочатку як частинку геометрії, потім як частину коду Всесвіту. Згодом навчилися вільно нею говорити й розшифровувати її ідіоми й нюанси. І нарешті вони оволоділи її можливостями прогнозувати майбутнє та почали за її допомогою змінювати світ.

Це головна теза цієї книжки.

Якщо вона правильна, то відповідь на головне питання життя, Всесвіту й усього — не 42, і нехай мене вибачать фанати Дугласа Адамса та «Автостопом по Галактиці»². Але Великий Мислитель думав у правильному напрямку: таємниця Всесвіту справді пов'язана з математикою.

Математика з'явилася, бо щодня була необхідна¹⁴. Вівчарям потрібно було рахувати поголів'я у своїх стадах. Фермерам — зважувати зерно, яке вони зібрали на полях. Збирачам податків — вирішити, скільки саме корів чи курей винен королю кожен підданий. Саме з таких практичних потреб виникла потреба в цифрах. Спочатку вони були прив'язані до пальців рук і ніг. Потім їх почали видряпувати на кістках тварин. Цифри розвивалися й перетворювалися з нашкрябаних знаків на символи. Вони ставали у пригоді всюди — від податків і торгівлі до бухгалтерських справ і перепису населення. Докази цього збереглися на глиняних месопотамських табличках, яким понад п'ять тисяч років. На них можна побачити ряди записів у вигляді символів клиноподібної форми. Це клинопис.

Мали значення не тільки символи, а й форми. У Давньому Єгипті вимірювати прямі й кути було справою першочергової ваги. Землеміри щороку мусили заново окреслювати кордони фермерських господарств, бо Ніл розливався і стирав усе, що вони намалювали раніше. Пізніше це заняття дало назву науці про форми, геометрії — від грецького слова *gē* — «земля» і *metrēs* — «вимірювач».

На початку геометрія визнавала тільки чіткі контури й кути. У її схильності до прямих ліній, площин і кутів було помітно корені практичності: коли потрібно було щось похиле, на порятунок приходили трикутники, піраміди перетворювалися на монументи і гробниці, а прямокутники — на столи, віттарі й ділянки землі. Ка-

менярі й теслярі використовували прямі кути для висків. Морякам, архітекторам і священнослужителям знання геометрії прямих ліній було потрібно, щоб виживати, орієнтуватися за картами, вести календар, прогнозувати затемнення і зводити храми.

Але навіть коли геометрія була зосереджена на прямих лініях, одна фігура завжди стояла осторонь і була найідеальніша з усіх — це коло. Кола можна побачити в кільцях дерева, у брижах на воді, у формі Сонця й Місяця — в усій природі. І коли ми дивимося на кола, вони буквально дивляться в нас, адже вони в очах тих, кого ми любимо, у формі зіниць і райдужок. Колами вимірюється практичне та емоційне: це може бути і колесо, і обручка — вони теж загадкові. Їх можна нескінченно обертати, і в цьому вгадується зміна сезонів, перевтілення, вічне життя й вічна любов. Не дивно, що кола привернули увагу людства, коли воно почало вивчати форми.

Кажучи математичною мовою, кола уособлюють зміну без зміни. Точка, яка рухається по колу, змінює напрямок, але ніколи не змінює відстані від центра. Це мінімальна форма зміни — найпростіший спосіб утворити зміну і криву. І звісно ж кола симетричні. Якщо ви покрутите коло відносно центра — здаватиметься, що нічого не змінилося. Можливо, кола такі поширені саме тому, що в них є така властивість. Якщо у природі виникає щось таке, де напрямок не грає ролі, — там обов'язково з'являється коло. Уявіть, що відбувається, коли крапля дощу падає в калюжу: від точки взаємодії починають розходитися кола. Це кола, тому що все почалося в одній точці й поширюється воно з однаковою швидкістю. Інакше бути не може. Цього вимагає симетрія.

Кола можуть породжувати й інші викривлені форми. Якщо уявити, що ми проштрикнули коло точно по центру й покрутили у тривимірному просторі, — у нас утвориться сфера, форма глобуса або м'яча. Якщо коло рухати у тривимірному просторі вертикально під прямим кутом відносно його площини, утвориться циліндр, форма бляшанки або свічки. Якщо воно буде одночасно і вертикально рухатися, і звужуватися — утворить конус; якщо буде рухатися і розширюватися — утворить зрізаний конус (форма класичного абажура).

2

ЛЮДИНА, ЩО ПРИБОРКАЛА НЕСКІНЧЕННІСТЬ

Через кілька сотень років після того, як Зенон розкинув думками над природою простору, часу, руху й нескінченності, нескінченність полонила ще одного мислителя. Його звали Архімед²⁵. Ми вже з ним зустрічалися, коли говорили про площу круга, але є ще багато причин називати його легендарною особистістю.

Взяти хоча б те, скільки про нього існує смішних історій²⁶. У кількох з них він здається справжнім гіком. Наприклад, історик Плутарх²⁷ розповідає, що інколи Архімед так заглиблювався в геометрію, що «забував про їжу й перестав приділяти увагу собі»²⁸. (У це легко повірити. Для багатьох із нас, математиків, їжа й особиста гігієна не стоять у пріоритеті). Плутарх далі розповідає, що коли Архімед із головою занурювався в математику, його потрібно було «насилено тягти купатися»²⁹. Цікаво, наскільки він опирався водним процедурам, бо ж усі ми знаємо пов'язану з ним історію про ванну. Згідно із записами римського архітектора Вітрувія³⁰, Архімед так зрадів, коли раптом його осяяло у ванні, що він вистрибнув з неї і з криками «Еврика!» («Знайшов!») побіг голим по вулиці.

В інших історіях його описують магом-військовим, науковцем-воїном / загоном смерті з одного бійця. За цими легендами, коли його рідне місто Сіракузи у 212 році до н. е. було в облозі римлян, Архімед — уже старий на той час, йому було близько сімдесяти — допоміг захистити місто, бо знав, як працюють важелі й блоки. Він допоміг створити фантастичну зброю, «машини війни» — величезні абордажні крюки й крани, за допомогою яких римські

кораблі піднімали над морем і витрушували з них моряків, наче пісок із черевика. Плутарх описував цю жахітливую сцену так: «Корабель часто піднімали в повітря³¹ (страшна сцена) і розхитували вперед-назад, аж поки всі моряки випадали за борт, а потім його розбивали об скелі або просто кидали назад».

Якщо серйозно, то всі, хто вивчав природничі науки та інженерію, знають Архімеда за, власне, законом Архімеда (на тіло, занурене в рідину, діє виштовхувальна сила, яка дорівнює вазі витісненої цим тілом рідини) і його законом рівноваги важеля (важкі об'єкти, розміщені по два боки важеля, будуть збалансовані тільки за умови, якщо їхня вага обернено пропорційна їхнім відстаням від точки опори). В обох ідей — незліченна кількість практичних застосувань. Закон Архімеда пояснює, чому одні предмети тримаються на воді, а інші — ні. Він також лежить в основі всього кораблебудування, теорії остійності і конструкції всіх плавучих нафтовидобувних платформ. І ви, навіть якщо самі цього не знаєте, використовуєте його закон рівноваги важеля, коли користуєтеся щипцями для нігтів чи ломом.

Можливо, Архімед був страхітливим творцем «машин війни» і, безсумнівно, геніальним науковцем та інженером, але в розряд богів його возвело те, що він зробив для математики. Він проклав шлях інтегральному численню. Найглибші Архімедові ідеї абсолютно чітко простежуються в його роботах, але потім майже дві тисячі років ніхто до такого не доходив. Тож було би дуже м'яко сказати, що він випередив свій час. Хтось узагалі випередив його настільки?

У його роботах знову і знову виринають дві стратегії. Перша — це те, наскільки палко він послуговується принципом нескінченності. Досліджуючи загадки кругів, сфер та інших вигнутих фігур, він завжди наближував їх до багатогранників з великою кількістю прямих граней, відшліфованих, наче діаманти. Він уявляв, що граней стає дедалі більше й вони стають куди менші, і він щораз ближче підходив до правди, до поняття нескінченної кількості граней. Для цього він мав стати справжнім чародієм сум і задач, тому що зрештою йому потрібно було знову знайти суму всіх шматочків, щоб дійти своїх висновків.

Коли Архімед помер, математичне вивчення природи майже померло разом з ним. Минуло 1800 років, перш ніж з'явився новий Архімед. У часи Ренесансу в Італії молодий математик на ім'я Галілео Галілей підхопив естафету Архімеда. Він спостерігав, як рухаються предмети, коли летять у повітрі або падають на землю, і шукав числові правила для цього руху. Він проводив уважні експерименти й робив розумний аналіз. Він спостерігав, як рухається маятник, і скочував м'ячі по невеликих схилах — і в обох процесах знаходив вражаючі закономірності. Тим часом молодий німецький математик на ім'я Йоганн Кеплер вивчав, як планети рухаються небосхилом. Обоє їх вражали закономірності в отриманих даних, і вони відчували, що тут є щось набагато глибше. Відчували, що на щось натрапили, але ніяк не могли зрозуміти значення цього. Закони руху, які вони відкривали, ніби були написані інопланетною мовою. Ця мова, яка й зараз невідома, називається диференціальним численням. Це було перше знайомство людства з ним.

До робіт Галілео і Кеплера природні феномени рідко розглядали через призму математики. Архімед відкрив математичні принципи балансу та плавучості в законах важеля й гідростатичної рівноваги, але ці закони стосувалися тільки статичних ситуацій, де не було руху. Галілео й Кеплер пішли далі статичного світу Архімеда й почали вивчати, як предмети рухаються. Їхні відчайдушні спроби розібратися, що саме вони бачать, прискорили появу нового типу математики, у якому з рухом можна було працювати як зі змінною. Це вводило тип зміни, яка постійно змінюється — коли м'яч котить-