Глава 1
Парадокс Монти Холла

Простые вероятности, способные свести с ума

Прежде чем углубиться в физику, думаю, для разминки я ознакомлю вас с несколькими простыми занимательными и обескураживающими загадками. Как и все остальные примеры, которые я разбираю в этой книге, на самом деле это не парадоксы — к этим загадкам просто нужен правильный подход. Но, в отличие от последующих парадоксов, для решения которых понадобится понимание лежащих в их основе физических процессов, парадоксы, представленные в данной главе, — это просто головоломки, их можно решить, не имея никакой научной базы. Последний и наиболее восхитительный из них, известный как парадокс Монти Холла, настолько сбивает с толку, что я приложу немалые усилия и проанализирую его с разных сторон, чтобы вы смогли выбрать решение, которое вам больше всего подходит.

Все загадки в этой главе подпадают под одну из двух категорий — истинные и мнимые. Истинный парадокс приводит нас к выводу, который противоречит интуиции, потому что выходит за рамки здравого смысла, но все же его можно разрешить с помощью выверенной, зачастую обманчиво простой логики. На деле основное удовольствие здесь заключается в том, чтобы доказать, что это правда, несмотря на мучительное, неприятное чувство, что где-то есть уловка. В эту группу входят парадокс дней рождения и парадокс Монти Холла.

С другой стороны, мнимый парадокс сначала выглядит абсолютно логичным, но каким-то образом в конце получается абсурдный результат. Однако в этом случае очевидно абсурдный результат на самом деле ложен, к нему приводит некоторое трудноуловимое заблуждение или ошибочный шаг в доказательстве.

Примерами мнимых парадоксов служат математические трюки, которые путем нескольких алгебраических действий «доказывают» что-нибудь наподобие 2 = 1. Никакая логика и никакие умствования не должны убедить вас, что это может быть правдой. Я не стану уделять им внимание в этой книге в основном потому, что мне действительно не хочется обрушивать на вас алгебру (на случай, если вдруг вы не разделяете моей любви к ней). Достаточно будет сказать, что расчеты, приводящие к такому «решению», обычно включают деление на ноль — действие, которого любой уважающий себя математик избегает как огня. Вместо этого я остановлюсь на нескольких задачах, которые вы сможете оценить, даже обладая минимальным багажом математических знаний. Я начну с двух великолепных мнимых парадоксов — загадки про потерянный доллар и парадокса ящиков Бертрана.

Потерянный доллар

Это чудесная задачка, которую я использовал несколько лет тому назад, когда участвовал в телевизионном шоу «Игры разума». Разумеется, я не утверждаю, что первым предложил ее. Суть шоу заключается в том, что каждую неделю участники соревнуются друг с другом в решении загадок, которые загадывает им ведущий — математик Маркус дю Сотой. Вдобавок участники должны попытаться сбить с толку команду соперников собственной излюбленной головоломкой.

Вот в чем ее суть.

Трое путешественников заселяются в отель. Администратор предлагает за 30 долларов номер с тремя кроватями. Они договариваются заплатить поровну, каждый по 10 долларов, берут ключ и отправляются в комнату. Через несколько минут администратор понимает, что ошибся. На этой неделе в гостинице действует специальное предложение, и он должен был взять с гостей за комнату 25 долларов. Итак, чтобы избежать неприятностей с менеджером, он хватает из кассы пять долларовых купюр и спешит исправлять свою ошибку. По пути он понимает, что не сможет разделить 5 долларов поровну между троими, поэтому решает дать каждому по доллару, а два оставить себе. Таким образом, рассуждает он, никто не останется в обиде. Здесь и возникает проблема, с которой нам предстоит разобраться. Выходит, что каждый из троих друзей заплатил за проживание 9 долларов. Всего получается 27 долларов, которые получил отель, плюс еще 2 доллара, которые забрал администратор, всего выходит 29. Куда же делся последний доллар из первоначальных 30?

Не исключено, что вы с ходу сможете увидеть решение. У меня определенно не получилось, когда я впервые услышал эту загадку. Так что я дам вам немного времени подумать над ней, прежде чем вы продолжите читать.

Разобрались? Теперь вы понимаете, эта задачка только выглядит парадоксальной из-за сбивающего хода, который в ней заключен. Ошибка в рассуждениях заключается в том, что я прибавил к 27 долларам 2 доллара, которые взял администратор. Это бессмысленно, поскольку общей учтенной суммы 30 долларов больше не существует. Два доллара, которые взял администратор, нужно *отнять* от 27 долларов, заплаченных друзьями, и у нас останутся те самые 25 долларов, лежащие в кассе.

Парадокс ящиков Бертрана

Вторым примером мнимого парадокса я обязан французскому математику Жозефу Бертрану, жившему в XIX веке. Он автор еще одного, более известного парадокса, который несколько сложнее предыдущего примера с математической точки зрения.

У вас есть три ящика, в каждом лежат по две монеты (рис. 1.1). Каждый ящик разделен на два отсека перегородкой (с каждой ее стороны лежит по монете). Каждую часть ящика можно открыть отдельно, чтобы посмотреть на монетку внутри (не имея возможности увидеть вторую монету). В одном ящике лежат две золотые монеты (обозначим его ЗЗ), во втором — две серебряные (СС), а в третьем — одна золотая и одна серебряная (ЗС). Какова вероятность, что в ящике, который вы выберете, окажутся золотая и серебряная монеты? Ответ, конечно же, прост: 1 к 3. Загадка заключается не в этом.

Теперь случайным образом выберите один ящик. Что, если вы откроете его с одной стороны и увидите золотую монету? Каковы теперь шансы, что это ящик ЗС? Что ж, поскольку вы видите золотую монету, это не может быть ящик СС, вы исключаете этот вариант и у вас остаются два варианта: это либо ящик ЗЗ, либо ящик ЗС. Следовательно, вероятность того, что это ящик ЗС, равна 1 к 2, не так ли?

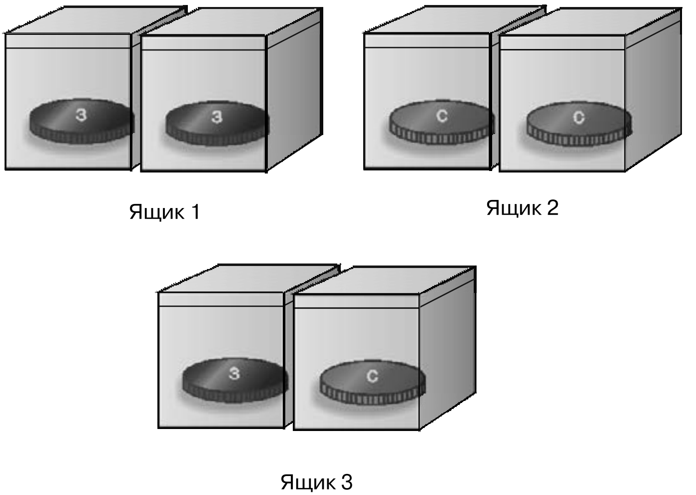

Рис. 1.1. Ящики Бертрана

Если же вы открыли крышку и увидели серебряную монету, можете исключить вариант ЗЗ. У вас остается СС и ЗС, и вероятность того, что это ящик ЗС, снова 1 к 2.

Когда вы откроете крышку выбранного ящика и найдете там либо золотую, либо серебряную монету (поскольку всего есть три монеты каждого вида, что дает вам равные шансы найти ту или иную монету), вероятность того, что это ящик ЗС, 1 к 2. Таким образом, после того, как вы заглянули в половину выбранного вами ящика, вероятность того, что это ящик ЗС, должна из 1 к 3, как это было вначале, превратиться в 1 к 2. Но как может получиться, что, увидев одну монету, вы настолько изменили вероятность? Если вы выбираете ящик случайным образом и до того, как открыть крышку, знаете, что с вероятностью 1 к 3 это ящик ЗС, то как же, взглянув на одну монету и не получив никакой новой информации (*поскольку вы уверены, что в любом случае найдете золотую или серебряную* *монету)*, удастся превратить вероятность 1 к 3 в 1 к 2? Где мы допускаем ошибку?

Ответ заключается в том, что вероятность всегда будет 1 к 3 и не превратится в 1 к 2 независимо от того, увидели ли вы монетку в ящике. Всего есть три золотые монеты, давайте назовем их За, Зб и Зв, и пусть ящик ЗЗ содержит монеты За и Зб, а монета Зв находится в ящике ЗС. Если вы откроете один из ящиков и найдете там золотую монету, вероятность того, что вы открыли ящик ЗЗ, составит 2 к 3, поскольку монета, которую вы видите, может быть монетой За или Зб. Вероятность того, что это монета Зв, равна всего лишь 1 к 3, следовательно, такова же вероятность того, что вы выбрали ящик ЗС.

Парадокс дней рождения

Это один из самых известных истинных парадоксов. В отличие от двух предыдущих примеров здесь нет никакого подвоха, нет ошибки в умозаключениях или уловки в изложении. Убедит вас объяснение или нет, я должен подчеркнуть, что оно абсолютно корректно и последовательно как с математической стороны, так и с точки зрения логики. Ощущение недоумения некоторым образом даже делает этот парадокс более интересным.

Вот как он формулируется.

> *Сколько людей, по-вашему, должно собраться в комнате, чтобы шансы того, что двое из них родились в один и тот же день, были выше, чем 50 на 50, то есть чтобы они были выше вероятности, что в этой группе не найдется двух людей с одинаковым числом и месяцем дня рождения?*

Давайте сначала обратимся к простому здравому смыслу (который, разумеется, приведет нас к ошибке). Поскольку в году

365 дней, представим себе лекционный зал с 365 пустыми креслами. В зал заходит сотня студентов, и каждый из них занимает случайное место. Друзья, возможно, захотят сесть рядом, несколько человек предпочтут незаметно подремать на задних рядах, а более прилежные студенты сядут ближе к лектору. Но не важно, как они распределятся по аудитории, факт в том, что более двух третей мест останутся незанятыми. Конечно, никто из студентов не сядет в кресло, которое уже занято, но мы как будто чувствуем, что вероятность того, что двое студентов захотят сесть на одно и то же место, невелика, учитывая, как много свободных кресел вокруг.

Если теперь мы применим этот практичный подход к задаче с днями рождения, то может показаться, что вероятность того, что любые двое студентов из ста родились в один день, настолько же мала (учитывая, что дней в году столько же, сколько кресел в аудитории). Разумеется, и здесь могут найтись люди, родившиеся в один день, но чисто интуитивно нам покажется, что это не так вероятно.

Конечно, если у нас будет группа, состоящая из 366 человек (високосные годы не учитываем), не нужно объяснять, почему мы можем быть уверены, что как минимум у двоих день рождения выпадет на один и тот же день. Но с меньшим числом людей все становится намного интереснее.

На самом деле, как бы это неожиданно ни звучало, вам потребуется всего лишь 57 человек, чтобы вероятность того, что у любых двоих из этой группы день рождения придется на один и тот же день, составила 99 %. То есть практически наверняка двое из них родились в один день!

Это звучит довольно неправдоподобно. Но что касается ответа на загадку, то число людей, свыше которого вероятность того, что у двух из них совпадет день рождения, будет больше, чем вероятность того, что таких людей не найдется (то есть вероятность этого события больше 0,5), намного меньше, чем 57, достаточно всего лишь 23 человек!

Большинство людей, узнающих ответ, сильно удивляются и продолжают беспокоиться, поскольку на интуитивном уровне в это очень сложно поверить. Поэтому давайте разберемся с математической составляющей, которую я постараюсь представить как можно более понятной.

Во-первых, максимально упростим задачу: не будем учитывать високосные годы (так вероятность выпадения каждого дня будет одинаковой) и предположим, что в комнате нет двойняшек.

Типичная ошибка заключается в том, что многие сравнивают количество людей в комнате с количеством дней в году. Соответственно, поскольку на 23 человека приходится 365 дней, кажется намного более вероятным, что их дни рождения будут разбросаны далеко друг от друга, нежели наоборот. Но это обманчивый подход. Если нам нужны люди с одинаковыми днями рождения, мы будем рассматривать не отдельных людей, а пары и нам нужно оценить количество различных возможных пар. Давайте начнем с простейшего случая: у нас есть три человека и, соответственно, три пары. A–B, A–C и B–C. Но в группе из четырех человек у нас будет уже шесть пар: A–B, A–C, A–D, B–C, B–D, C–D. В группе из 23 человек у нас получится 253 различные пары[1]. Видите, насколько проще поверить в то, что в одной из 253 пар окажутся люди, родившиеся в один и тот же день из 365?

---

[1] Существует математический способ вычисления этого, который называется биномиальным коэффициентом. В данном случае он записывается так: $\binom{23}{2} = \frac{23 \times 23}{2} = 253$.