# НЕВЕРОЯТНЫЕ ЧИСЛА ПРОФЕССОРА СТЮАРТА

# PROFESSOR STEWART'S INCREDIBLE NUMBERS

IAN STEWART

PROFILE BOOKS

# НЕВЕРОЯТНЫЕ ЧИСЛА ПРОФЕССОРА СТЮАРТА

ИЭН СТЮАРТ

Перевод с английского

анф

Москва
2016

УДК 511.1
ББК 22.1
С88

Переводчик Наталья Лисова
Научный редактор Андрей Родин, канд. филос. наук
Редактор Антон Никольский

**Стюарт И.**
С88 Невероятные числа профессора Стюарта / Иэн Стюарт ; Пер. с англ. — М.: Альпина нон-фикшн, 2016. — 422 с.

ISBN 978-5-91671-530-9

По сути, математика — это цифры, наш основной инструмент для понимания мира. В своей книге самый известный британский популяризатор математики, профессор Иэн Стюарт предлагает восхитительное знакомство с числами, которые нас окружают, начиная с привычных для нас комбинаций символов и заканчивая более экзотическими — факториалами, фракталами или постоянной Апери. На этом пути Стюарт рассказывает нам о простых числах, о кубических уравнениях, о понятии нуля, возможных вариантах кубика Рубика, о роли чисел в истории человечества и актуальности их изучения в наше время. С присущими ему остроумием и эрудицией Стюарт раскрывает перед читателем завораживающий мир математики.

УДК 511.1
ББК 22.1



ISBN 978-5-91671-530-9 (рус.)
ISBN 978-1-78283-1587 (англ.)

# Содержание

# Предисловие

Числа всегда завораживали меня. Мама научила меня читать и писать задолго до школы, но в первый школьный день, вернувшись домой, я пожаловался, что «мы ничего *не выучили!*». Подозреваю, что родители готовили меня к этому трудному дню, рассказывая, что в школе мы будем изучать множество интересных вещей, и я слишком близко к сердцу принял эту «откровенную пропаганду». Но очень скоро я начал изучать планеты и динозавров, а также учиться делать зверюшек из пластилина. И узнал много нового о числах.

Я до сих пор очарован числами и узнаю о них все новые и новые факты. Имейте в виду, я всегда готов подтвердить, что математика имеет множество разных сторон — к примеру, она занимается геометрическими фигурами, закономерностями, вероятностями, — но числа составляют фундамент всего здания. А каждое число обладает своей индивидуальностью. Некоторые особые числа возвышаются над остальными и, кажется, играют центральную роль во многих областях математики. Самое известное из таких чисел — число $\pi$, которое мы впервые встречаем в связи с окружностями, но которое имеет замечательное обыкновение выскакивать будто из ниоткуда в задачах, в которых вроде бы об окружностях и речи нет.

Большинство чисел, конечно, не может претендовать на такую заоблачную значимость, но, как правило, даже у самого скромного числа найдется какое-нибудь необычное свойство. У Дугласа Адамса в «Автостопом по Галактике»* число 42 было «Ответом на Основной Вопрос Жизни, Вселенной и Всего Остального». Адамс пояснил, почему он выбрал именно

* Дуглас А. Автостопом по Галактике — М.: АСТ, Астрель, 2012.

это число: короткий опрос среди друзей показал, что оно невыносимо скучное и не интересно абсолютно ничем. Но на самом деле это не так, что будет продемонстрировано в заключительной главе.

Эта книга организована с помощью чисел, хотя и не всегда в порядке возрастания. Наряду с главами 1, 2, 3 и так далее в ней есть также глава 0, глава 42, глава –1, глава $\frac{22}{7}$, глава $\pi$, глава 43 252 003 274 489 856 000 и глава $\sqrt{2}$. Очевидно, что множество других не менее возможных глав так и не смогли выбраться из числового ряда. Каждая глава начинается с краткого изложения основных тем, которые в ней содержатся. Не тревожьтесь, если такое введение покажется вам непонятным и загадочным, а также если в нем будут содержаться ничем не доказанные утверждения. Дальше все разъяснится.

Структура книги очень проста: в каждой главе речь идет об одном каком-нибудь интересном числе и объясняется, *почему* оно интересно. К примеру, число 2 интересно тем, что разница между четными и нечетными числами проявляется всюду в физике и математике; число 43 252 003 274 489 856 000 интересно потому, что это число состояний кубика Рубика.

Поскольку число 42 включено в книгу, в нем тоже должно быть что-то интересное. Ну, да, *кое-что* о нем можно рассказать.

Здесь я должен упомянуть песню Арло Гатри «Ресторан Алисы» — бесконечную музыкальную балладу, где подробно и с повторами рассказывается о множестве событий, включая вынос мусора. После десяти минут пения Гатри останавливается и говорит: «Но я пришел сюда поговорить с вами не об этом». Постепенно, однако, выясняется, что на самом деле он пришел говорить именно об этом, но мусор — лишь часть картины. А теперь пора и мне последовать примеру Арло Гатри: на самом деле это книга не о числах.

Числа — это врата, воспользовавшись которыми мы можем погрузиться в мир связанной с ними поразительной математики. *Каждое число — особое.* Если вы начинаете воспринимать их как нечто индивидуальное, они становятся похожи на старых друзей. Каждое может рассказать собственную историю. Часто эта история ведет к множеству других чисел, но по-настоящему важно, что связывает их математика. Числа — как действующие лица в драме, где главное — сюжет и собственно драма. Но драма невозможна без действующих лиц.

Чтобы избежать чрезмерной дезорганизации, я поделил книгу на части в соответствии с характером чисел: небольшие натуральные числа, дроби, действительные числа, комплексные числа, бесконечность… За несколькими неизбежными исключениями материал излагается в логической последовательности, так что более ранние главы закладывают фундамент для более поздних даже там, где тема полностью меняется. Такой подход сказывается на организации чисел и требует некоторых компромиссов. Самый существенный из них касается комплексных чисел. Они появляются очень рано, потому что без них я не смогу говорить о некоторых особенностях более привычных чисел. Точно так же иногда какая-то сложная тема появляется вдруг в неожиданном месте, потому что это место — единственное, где ее есть смысл упомянуть. Если вы встретите один из таких пассажей и обнаружите, что воспринимаете его с трудом, пропустите и двигайтесь дальше. Вы сможете вернуться к нему позже.

Эта книга — своего рода текстовый справочник к моему приложению для iPad под тем же названием «Невероятные числа профессора Стюарта» (Professor Stewart's Incredible Numbers). Чтобы читать книгу, вам не нужно искать это приложение, и наоборот: чтобы пользоваться приложением, книга не нужна. Более того, пересечений между ними относительно немного. Они просто дополняют друг друга, потому что каждый из двух носителей может делать что-то, чего не может другой.

Числа и правда невероятны — не в том смысле, что нельзя верить ничему, что вы о них слышите, но в положительном смысле: в них всегда есть что-то, по поводу чего можно воскликнуть «Вау!». И, чтобы почувствовать это, не обязательно их складывать. Можно посмотреть, как развивалась история чисел, оценить красоту закономерностей, узнать, как они используются, поудивляться сюрпризам: «Никогда не думал, что число 56 так очаровательно!» Да, удивительно, но это действительно так.

Другие числа тоже невероятно интересны. Включая и число 42.

# Числа

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, … Что может быть проще? Тем не менее именно числа — возможно, больше, чем что-либо — позволили человечеству вытащить себя из грязи и устремиться к звездам.

Отдельные числа имеют собственные характерные черты и ведут в самые разные области математики. Однако, прежде чем рассматривать числа по отдельности, нам стоит бросить беглый взгляд на три серьезных вопроса: как возникли числа? Откуда взялась концепция числа? И *что такое,* собственно, числа?

## Происхождение чисел

Около 35 000 лет назад, в верхнем палеолите, неизвестный человек вырезал 29 зарубок на малой берцовой кости павиана. Кость эта была найдена в пещере в горах Лебомбо, что в Свазиленде, а потому так и называется — «кость из Лебомбо». Считается, что это счетная бирка — штука, на которой записывают числа в виде серии зарубок: |, ||, ||| и так далее. В лунном месяце 29,5 суток, так что это может быть примитивный лунный календарь — или запись женского менструального цикла. Или, вообще говоря, случайный набор надрезов. Этакие каракули на кости.

Еще одну счетную бирку с 55 отметками, на этот раз на волчьей кости, нашел в Чехословакии в 1937 г. Карел Абсолон. Ее возраст около 30 000 лет.

В 1960 г. бельгийский геолог Жан Эйнзелен де Брокур обнаружил еще одну малую берцовую кость павиана с насечками среди остатков крохотной рыболовной деревушки, попавшей под извержение вулкана и погребенной под слоем пепла. Стоянка рыболовов располагалась в современном Ишанго, районе на границе Уганды и Конго. Возраст кости — примерно 20 000 лет.

Простейшая интерпретация кости из Ишанго — это опять же счетная бирка. Одни антропологи идут еще дальше и находят в ней элементы арифметической структуры, такие как умножение, деление и простые числа; другие считают, что это шестимесячный лунный календарь; третьи же убеждены, что насечки на кости сделаны для того, чтобы костяной инструмент было удобнее держать в руке, и что в нем нет никакого математического смысла.

**Рис. 1.** Кость из Ишанго спереди и сзади. Музей естественных наук, Брюссель

Находка, безусловно, интригующая. На кости имеется три серии насечек. В центральной серии присутствуют числа 3, 6, 4, 8, 10, 5, 7. Дважды три — 6, дважды четыре — 8, а дважды пять — 10; однако последняя пара чисел располагается в обратном порядке, а 7 вообще никак не укладывается в схему. В левой серии располагаются группы по 11, 13, 17, 19 насечек; это простые числа в интервале от 10 до 20. Правая серия дает нам нечетные числа 11, 21, 19, 9. Сумма чисел как в правой, так и в левой части равна 60.

Проблема с интерпретацией подобных образцов состоит в том, что *в любой* серии не слишком больших чисел трудно не найти никаких закономерностей. К примеру, в табл. 1 приведены площади десяти островов Багамского архипелага, занимающих места с 11-го по 20-е по площади среди всех островов. Чтобы внести дополнительный элемент случайности, я расположил их в алфавитном порядке. Поверьте, это было первое, что пришло мне в голову. Признаюсь, что я заменил бы их чем-нибудь другим, если бы эти числа не оправдали моих надежд, но они оправдали — и мне не пришлось ничего менять.

Итак, какие «закономерности» можно заметить в этом наборе чисел? Там множество коротких последовательностей чисел, обладающих общими чертами.

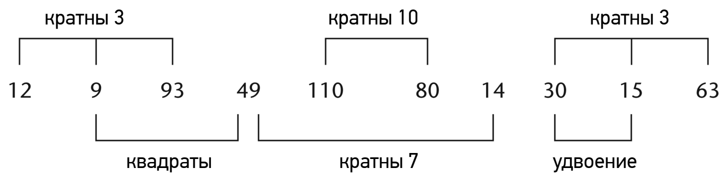


**Рис. 2.** Кажущиеся закономерности в площадях Багамских островов

Для начала: весь список получился чудесно симметричным. С каждой стороны стоит по три числа, делящихся на три. В середине имеется пара чисел, кратных 10, по бокам от которых стоят два числа, кратные 7. Более того, имеют место два квадрата: $9 = 3^2$ и $49 = 7^2$; то и другое — квадрат *простого числа*. Еще одна соседняя пара — 15 и 30; одно из чисел вдвое больше другого. В последовательности 9–93–49 в каждом из чисел присутствует цифра 9. Каждое последующее число то больше, то меньше предыдущего, за исключением цепочки 110–80–14. Да, и вы заметили, что среди этих десяти чисел нет ни одного простого?

Сказанного достаточно. Еще одна проблема с костью из Ишанго состоит в том, что найти какие бы то ни было дополнительные данные в пользу любой конкретной интерпретации насечек практически невозможно. Бесспорно, история весьма интригующая. Числовые головоломки всегда производят завораживающее впечатление. Так что приведем менее спорный пример.

| Название | Площадь в квадратных милях |
|---|---|
| Берри | 12 |
| Бимини | 9 |
| Крукед-Айленд | 93 |
| Малый Инагуа | 49 |
| Маягуана | 110 |
| Нью-Провиденс | 80 |
| Рэггид-Айленд | 14 |
| Рам-Ки | 30 |
| Самана-Ки | 15 |
| Сан-Сальвадор | 63 |

**Таблица 1**

Десять тысяч лет назад на Ближнем Востоке для записи чисел использовались специальные глиняные бирки; числа эти, скорее всего, были связаны с налогообложением или, может быть, удостоверяли право владения. Самые древние бирки найдены при раскопках тепе (холмов) Асьяб и Гандж-и-Дарех — двух археологических памятников в иранских горах Загрос. Бирки представляли собой небольшие комочки глины разной формы, некоторые из них отмечены определенными символами. Считается, что шарик со знаком + обозначал одну овцу; семь таких шариков, соответственно, обозначали семь овец. Чтобы не делать слишком много шариков, имелись бирки другой формы, обозначавшие сразу десять овец. Были специальные бирки для десяти коз и так далее. Археолог Дениза Шмандт-Бессера сделала вывод, что счетные бирки обозначали основные товары того времени: зерно, скот, кувшины масла.

К 40 в. до н. э. счетные бирки нанизывали на бечевку, как бусы. Однако такое число несложно изменить, добавив или убрав «бусины», поэтому были введены специальные меры предосторожности. Весь набор бирок оборачивали в глину, которую затем обжигали. Любой спор о числах можно было разрешить, разбив глиняную обертку. С 35 в. до н. э., чтобы не ломать каждый раз «документ», бюрократы древней Месопотамии начали делать надпись на «конверте», перечисляя содержащиеся внутри бирки.

Затем до какого-то умника дошло, что надпись снаружи делает бирки внутри лишними. Результатом стало появление системы письменных числовых символов, проложивших дорогу всем последующим системам числовой нотации и, возможно, письменности вообще.

**Рис. 3.** Глиняный конверт и бухгалтерские бирки, период Урук, г. Сузы (Шуш)

Книга, которую вы держите в руках, посвящена в первую очередь не истории, поэтому более поздние системы числовой записи я буду рассматривать по мере их появления в связи с конкретными числами. К примеру, о десятичной системе в древности и современности речь пойдет в главе 10. Однако, как заметил великий математик Карл Фридрих Гаусс, важна не система записи, а понятия. Дальнейшие темы станут более понятными, если рассматривать их в контексте меняющихся представлений человечества о числах. Поэтому мы начнем с краткого обзора основных числовых систем и кое-какой важной терминологии.

## Постоянно расширяющаяся числовая система

Мы склонны думать о числах как о чем-то раз и навсегда зафиксированном и неизменном — как о свойстве природы. На самом деле числа — хотя и человеческое изобретение, но очень полезное, потому что числа помогают нам описать и представить различные стороны окружающего мира. К примеру, сколько в вашей отаре овец или каков возраст Вселенной. Природа раз за разом удивляет нас, ставя все новые вопросы, ответы на которые иногда требуют разработки новых математических концепций. Иногда внутренние потребности математики дают ученым подсказку для новых открытий. Время от времени эти потребности и внешние задачи приводят математиков к расширению числовой системы и изобретению новых разновидностей чисел.

Мы уже видели, что первые числа появились как метод счета всевозможных вещей. В Древней Греции поначалу список чисел выглядел, как 2, 3, 4 и так далее; единица была особым понятием и не считалась «настоящим» числом. Позже, когда такое представление о числах начало казаться очень уж глупым, единицу тоже стали считать числом.

Следующим серьезным шагом вперед в расширении числовой системы стало введение дробей. Это очень полезная штука, если вам нужно разделить некий товар на несколько человек. Если три человека получат равные доли от двух мешков зерна, каждый из них получит по $\frac{2}{3}$ мешка.

Древние египтяне представляли дроби тремя разными способами. У них имелись специальные иероглифы для $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$. Кроме того, они использовали отдельные части уаджета, или ока Ра, для обозначения единицы, деленной на первые шесть степеней двойки. Наконец, они придумали запись дроби в виде «единица над чем-то»: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ и так далее. Все остальные дроби они выражали как сумму различных долей единицы. К примеру,

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}.$$


**Рис. 4.** Слева: египетские иероглифы, обозначающие $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$. В середине: око Ра (уаджет). Справа: полученные из него иероглифы дробей

Неясно, почему они не записывали $\frac{2}{3}$ как $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$, но факт остается фактом: они это не делали.

Число нуль появилось намного позже, вероятно, потому, что особой нужды в нем не было. Если у тебя вообще нет овец, их не нужно считать или переписывать. Нуль сначала был введен как символ, обозначение и не считался числом как таковым. Но когда (см. главу –1) китайские и индийские математики ввели отрицательные числа, 0 тоже пришлось считать числом. К примеру, $1 + (-1) = 0$, а сумма двух чисел, очевидно, тоже должна считаться числом.

Математики называют ряд чисел

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

*натуральными числами*. Если добавить сюда же отрицательные числа, получатся *целые*

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Дроби, нуль и отрицательные дроби образуют *рациональные числа*.

Число является *положительным,* если оно больше нуля, и *отрицательным,* если оно меньше нуля. Таким образом, любое число (будь то целое или рациональное) обязательно попадает в одну из трех категорий: оно либо положительное, либо отрицательное, либо нуль. Числа, используемые при подсчете

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …

это положительные целые. Такая договоренность привела к возникновению одного достаточно неуклюжего термина: натуральные числа, то есть целые числа

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …

часто называют *неотрицательными* целыми числами. Извините, так получилось*.

Долгое время дроби были вершиной раздела математики, описывающего числа. Но древние греки доказали, что нет такой дроби, квадрат которой в точности равен 2. Позже это утверждение было сформулировано как «число $\sqrt{2}$ иррационально», то есть не является рациональным. Греки пользовались более неуклюжим выражением для обозначения того же самого, но они уже знали, что число $\sqrt{2}$ должно существовать: согласно теореме Пифагора, это длина диагонали квадрата со стороной 1. Так что потребовались дополнительные числа: рациональные уже не справлялись. Греки нашли сложный геометрический метод работы с иррациональными числами, но он не удовлетворял всех потребностей.

Следующий шаг к современной концепции числа стал возможен после изобретения десятичной запятой (или точки) и вообще десятичной записи числа. При этом появилась возможность представления иррациональных чисел с очень высокой точностью. К примеру,

$$\sqrt{2} \sim 1{,}4142135623$$

---

* В русской математической традиции натуральными называют лишь числа 1, 2, 3,…, не относя к ним нуль. — *Прим. пер.*

верно до десяти знаков после запятой (здесь и в других местах символ $\sim$ означает «приближенно равно»). Это выражение неточно; квадрат приведенного числа на самом деле равен

$$1{,}99999999979325598129.$$

Вот несколько лучшая аппроксимация, верная до двадцати знаков после запятой:

$$\sqrt{2} \sim 1{,}41421356237309504880.$$

Впрочем, она тоже неточна. Однако в некотором строго логическом смысле бесконечно длинный ряд десятичных знаков все же точен. Разумеется, записывать такие выражения полностью невозможно, но можно обозначить некоторые условия, при которых они имеют смысл.

Бесконечные десятичные дроби (включая, кстати говоря, и конечные, которые можно интерпретировать как дроби, заканчивающиеся бесконечным числом нулей) называются *действительными (или вещественными) числами,* отчасти потому, что они непосредственно соответствуют измерениям в реальном мире — длинам, весам и другим величинам. Чем точнее измерение, тем больше десятичных знаков потребуется для его записи; чтобы записать точную величину, их потребуется бесконечное количество. Как ни странно, именно вещественные числа представлены как бесконечные дроби, которые полностью записать попросту невозможно. Допускаются также и отрицательные вещественные числа.

До XVIII в. никакие другие математические концепции не считались настоящими числами. Однако уже в XV в. некоторые математики задавались вопросом о возможном существовании еще одного типа числа: квадратного корня из минус единицы, то есть числа, которое при умножении на самого себя дает –1. На первый взгляд, это безумная идея, поскольку квадрат любого действительного числа положителен или равен нулю. Однако оказывается, что имеет смысл проявить настойчивость и снабдить число –1 квадратным корнем, для обозначения которого Леонард Эйлер ввел символ $i$. Это первая буква слова «воображаемый» (*imaginary* в английском, латинском, французском и немецком языках); число получило такое называние, чтобы отличаться от старых добрых действительных чисел. К несчастью, это вызывало к жизни много ненужного мистицизма — Готфрид Лейбниц напустил тумана и скрыл ключевой факт, назвав $i$ «чем-то средним между существующим и несуществующим». А именно: и действительные, и «воображаемые» числа имеют в точности одинаковый логический статус. То и другое — человеческие концепции, помогающие моделировать реальность, но сами они не реальны.

Существование числа $i$ вынуждает нас ввести множество других новых чисел, без которых невозможно осуществлять арифметические действия; речь идет о числах вида $2 + 3i$. Они называются *комплексными числами*, без которых математика не в состоянии обходиться уже несколько столетий. Этот забавный, но истинный факт может оказаться новостью для большей части рода человеческого, потому что в школьной математике комплексные числа встречаются редко. Не потому, что они не важны, а потому, что связанные с ними идеи слишком сложны и применение их не просто.

Для обозначения основных числовых систем математики пользуются особыми значками. Я не буду дальше их использовать, но вам, вероятно, стоит один раз на них посмотреть:

$\mathbb{N}$ = множество всех натуральных чисел 0, 1, 2, 3, …;
$\mathbb{Z}$ = множество всех целых чисел …, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, …;
$\mathbb{Q}$ = множество всех рациональных чисел;
$\mathbb{R}$= множество всех действительных чисел;
$\mathbb{C}$= множество всех комплексных чисел.

Эти системы вкладываются одна в другую, как матрешки:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, где символ $\subset$ из теории множеств означает или «содержится в». Обратите внимание: каждое целое число, к примеру, является также рациональным; так, целое число 3 есть также дробь $\frac{3}{1}$. Обычно мы так не пишем, но, в принципе, оба варианта записи обозначают одно и то же число. Аналогично, каждое рациональное число также является действительным, а каждое действительное — комплексным. Новые числовые системы включают в себя более старые, а не заменяют их.

Но даже комплексные числа — не предел расширения числовой системы, которым математики занимались на протяжении столетий. Существуют, например, кватернионы $\mathbb{H}$ и октонионы $\mathbb{O}$ (см. главу 4). Однако их уже удобнее рассматривать в рамках алгебры, а не арифметики. Поэтому я закончу упоминанием еще более парадоксального числа — бесконечности. С философской точки зрения бесконечность отличается от традиционных чисел и не принадлежит ни к одной из стандартных числовых систем, начиная от натуральных чисел и заканчивая комплексными. Тем не менее она долгое время болталась где-то с краю, похожая на число, но все же не число как таковое. Болталась до тех пор, пока Георг Кантор не вернулся к точке старта — к счету — и не показал, во-первых, что бесконечность — все же число в смысле возможности счета, а во-вторых, что существуют бесконечности *разных размеров*. Среди них можно назвать $\aleph_0$ — количество натуральных чисел и $\mathfrak{c}$ — количество вещественных чисел, которое больше. *Насколько* больше, дело темное: это зависит от того, какую систему аксиом использовать для формализации математики.

Но оставим это до того момента, пока не наработаем достаточного чутья на привычных числах. Что приводит меня к третьему вопросу.

## Что такое число?

Вопрос, кажется, несложный, и это на самом деле так. А вот ответ на него совсем не прост.

Мы все умеем пользоваться числами. Мы все знаем, как выглядят семь коров, или семь овец, или семь стульев. Мы все можем посчитать до семи. Но *что такое* семь?

Это не символ 7. Символ — дело произвольного выбора, и в разных культурах для обозначения одного и того же числа используются разные знаки. В арабской математической традиции 7 обозначается как ٧, в китайской — 七, или в более формальном варианте 柒.

Это и не слово «семь», которое по-английски было бы *seven,* по-французски — *sept,* по-немецки — *sieben*.

Примерно в середине XIX в. некоторые логически мыслящие математики вдруг поняли, что, хотя все на свете не одну тысячу лет с удовольствием пользуются числами, никто не знает, что это на самом деле такое. И они вслух задали вопрос, который задавать, по всей видимости, не следовало: *что такое* число?

Этот вопрос хитрее, чем кажется. Число — это не что-то, что можно показать кому-то в реальном физическом мире. Это абстракция, ментальная человеческая концепция — да, извлеченная из реальности, но *не реальная* сама по себе.

Возможно, это звучит странно и даже тревожно, но числа в этом отношении не одиноки. Еще один знакомый пример — «деньги». Все мы знаем, как заплатить за что-то и получить сдачу, и делаем это — по крайней мере нам так кажется, — обмениваясь деньгами. Таким образом, при мысли о деньгах на ум приходят монеты и купюры в карманах или кошельках. Однако все не так просто. Если мы пользуемся кредитной карточкой, то ни монеты, ни купюры при оплате покупки не переходят из рук в руки. Вместо этого по информационной системе компании, обслуживающей карточку, передаются сигналы, которые затем поступают в наш банк, и числа на нескольких банковских счетах — наших, магазина, обслуживающей компании — меняются. Когда-то на британской банкноте номиналом 5 фунтов стерлингов было написано: «Я обещаю заплатить носителю сего по первому требованию сумму в пять фунтов».

Значит, это вовсе не деньги, а всего лишь обязательство о выплате денег. При случае такую купюру можно было отнести в банк и обменять на золото, которое считалось *настоящими* деньгами. Сейчас банк готов лишь обменять вашу купюру на другую того же номинала. Но и золото на самом деле не было настоящими деньгами; это было всего лишь одно из материальных воплощений денег. В качестве доказательства можно вспомнить о том, что сегодня стоимость золота не фиксирована.

Так что же, деньги — это число? Да, но только в пределах особого юридического контекста. Написав на листочке бумаги $1 000 000, вы не превратитесь в одночасье в миллионера. *Деньгами* деньги становятся лишь в рамках человеческих договоренностей о том, как следует представлять денежные суммы и как обменивать их на вещи или другие суммы в другой валюте. Главное — не что такое деньги, а что вы с ними делаете. Деньги — это абстракция.

То же можно сказать и о числах. Но это, в общем-то, не ответ, потому что вся математика абстрактна. Мало кто задумывался о том, при помощи какого *рода* абстракции можно было бы определить понятие «число». В 1884 г. немецкий математик по имени Готтлоб Фреге написал книгу «Основы арифметики» (Die Grundlagen der Arithmetik) и изложил в ней основные принципы, на которых базируется концепция чисел. Десять лет спустя он пошел еще дальше и попытался вывести эти принципы из фундаментальных законов логики. Его «Основные законы арифметики» (Grundgesetze der Arithmetik) были изданы в двух томах, первый из которых вышел в 1893 г., а второй — в 1903 г.

Фреге начал с процесса счета и сосредоточился не на числах, которые мы при этом используем, а на предметах, которые считаем. Если я поставлю на стол семь чашек и посчитаю их «1, 2, 3, 4, 5, 6, 7», то самым важным объектом здесь, на первый взгляд, будут числа. Фреге с этим не согласился: он думал о чашках. Система счета работает до тех пор, пока у нас есть набор чашек, которые, собственно, мы и хотим сосчитать. С другим набором у нас, строго говоря, может получиться другое число. Фреге назвал наборы объектов, которые мы считаем, *классами*. Сосчитав, сколько чашек содержит данный конкретный класс, мы устанавливаем соответствие между этим классом чашек и числовыми символами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

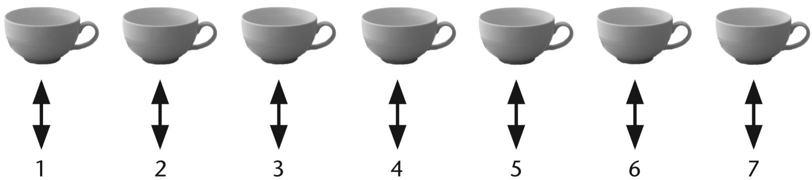


**Рис. 5.** Соответствие между чашками и числовыми символами

Точно так же можно установить соответствие между объектами и числами, если рассмотреть класс блюдец.

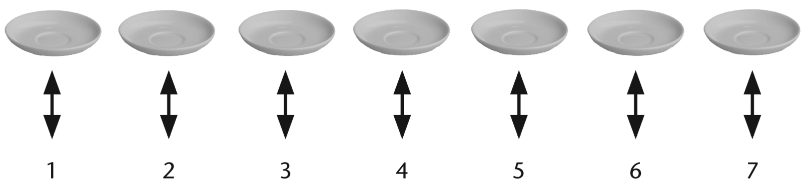


**Рис. 6.** Соответствие между блюдцами и числами

В данном случае можно сделать вывод, что класс блюдец содержит столько же (то же число) блюдец, что и класс чашек — чашек. Мы даже знаем, сколько именно: семь.

Все это может показаться очевидным до банальности, но Фреге понял, что эти утверждения сообщают нам нечто весьма глубокое. А именно, что мы можем доказать, что класс блюдец содержит столько же блюдец, сколько класс чашек содержит чашек, без использования символов 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и даже не зная, сколько именно в них содержится чашек или блюдец. Для этого достаточно установить соответствие между классом чашек и классом блюдец.

**Рис. 7.** Чтобы установить соответствие между чашками и блюдцами, не нужны числовые символы

Формально такой вид соответствия называется взаимно однозначным: каждой чашке соответствует в точности одно блюдце, а каждому блюдцу — в точности одна чашка. Счет не работает, если вы пропускаете чашки или считаете одну и ту же чашку несколько раз. Мы будем называть это просто соответствием, не забывая при этом о формальном условии.

Кстати говоря, если вы когда-нибудь удивлялись тому, что детям в начальной школе приходится множество коров соотносить с множеством цыплят, соединяя тех и других карандашными линиями, и проделывать другие аналогичные «операции», то благодарить за все это мы должны Фреге. Некоторые педагоги надеялись (и, возможно, надеются до сих пор), что такой метод помогает развить у ребенка чутье на числа. Я склонен считать, что этот подход продвигает логику в ущерб психологии и только запутывает представления детей о «фундаментальном», но давайте не будем начинать здесь «математические войны».

Фреге пришел к выводу, что в основе того, что мы понимаем под «числом», лежит установление отношений между классами при помощи соответствия. Подсчет числа объектов, содержащихся в классе, сводится к установлению соответствия этого класса с неким стандартным классом, члены которого обозначены условными символами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и так далее или другими в зависимости от конкретной культуры. Но Фреге не считал, что концепция числа должна различаться в разных культурах, поэтому он предложил способ вообще избавиться от произвольных символов. Точнее говоря, он изобрел универсальный суперсимвол, одинаковый во всех культурах. Но это был не тот символ, который можно записать на бумаге: это был чисто концептуальный символ.

Он начал с того, что указал, что члены любого класса сами тоже могут являться классами. Это не обязательно, но и не запрещено. Обычный бытовой пример — коробка консервных банок с тушеной фасолью: в коробке содержатся банки, в банках — бобы. Так что классы вполне можно включать в другие классы в качестве членов.

Число «семь» связано через соответствие с любым классом, который можно соотнести с нашим классом чашек, или со связанным с ним классом блюдец, или с классом, содержащим символы 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Можно, конечно, выбрать среди всех этих классов один и назвать его числом, но это произвольное решение, которому недостает элегантности и убедительности. Так почему бы нам не пойти до конца и не использовать все эти классы одновременно? Тогда «семь» можно определить как *класс всех классов,* которые соответствуют хотя бы одному (а значит, всем) из только что упомянутых классов. Сделав это, мы можем сказать, насчитывает ли некий данный класс семь членов, попросту проверив, входит ли он в этот класс классов. Для удобства мы можем повесить на этот класс классов табличку «семь», но сам он имеет смысл в любом случае, даже если мы этого не сделаем. Таким образом Фреге отделил число от его произвольного названия или столь же произвольного символа для его обозначения.

После этого он смог определить число вообще: это класс тех классов, которые находятся в соответствии с данным классом (а следовательно, и друг с другом). Именно класс подобного типа я имел в виду, когда говорил о суперсимволе. Это блестящая идея, если вам нравится подобный способ мышления. По существу, вместо того чтобы выбрать для числа название, мы концептуально объединяем *все возможные названия* в единый объект и используем этот объект вместо названия.

Сработал ли метод Фреге? Об этом вы можете узнать позже, в главе $\aleph_0$.

# Первые десять

Самые известные среди всех чисел — натуральные числа от 1 до 10.

Каждое из них индивидуально и обладает необычными чертами, которые выделяют его среди остальных.

Знакомство с особыми свойствами этих чисел делает каждое из них понятным, дружественным и интересным объектом.

Скоро вы тоже станете математиком.