МАТЕМАТИКА В ОГНЕ

НЕСКУЧНЫЙ НЕУЧЕБНИК

ДЖЕЙСОН УИЛКС

Купить книгу на сайте kniga.biz.ua >>>

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 10

Профисловие 20

Акт I

Глава 1. Ex Nihilo 38

Интерлюдия 1. Замедление времени 92

Глава 2. Бесконечные возможности стекла с бесконечным увеличением 110

Интерлюдия 2. Как получить что-то из ничего 159

Глава 3. Словно вызванное из пустоты 166

Интерлюдия 3. Взгляд назад в будущее 211

Акт II

Глава 4. О кругах и методе сдачи 218

Интерлюдия 4. Ностальгическое устройство 259

Глава 5. Эстетика и недвижимый объект 274

Интерлюдия 5. Две тучки 319

Купить книгу на сайте kniga.biz.ua >>>

Акт III

Глава 6. Два в одном 342

Интерлюдия 6. Убийство диеза 374

Глава N. Новое — это старое 397

Интерлюдия N. Неправильное истолкование и новое истолкование 438

Глава ℵ. Бесконечная красота бесконечного дикого пространства 445

Главлюдия Ω. In Nihilo 485

Эта книга 493

Словарь 500

Указатель 507

Об авторе 510

Купить книгу на сайте kniga.biz.ua >>>

ПРЕДИСЛОВИЕ

*Хорошая литература должна утешать расстроенных и беспокоить утешенных**.

Дэвид Фостер Уоллес, интервью с Ларри Маккефери

Художественную и научно-популярную литературу не так легко разделить.

Янн Мартел, «Беатриче и Вергилий»

Сожгите кабинет математики

Ладно, не сжигайте кабинет, на самом деле. И ничего другого тоже. Поджог — нехорошо и абсолютно противозаконно. Я… Неважно. Не хочу начинать книгу так.

(Автор ненадолго задумывается.)

Ладно, я думаю… в общем, ясно. Извините.

(Кхе-кхе.)

Все мы должны сильно негодовать. У нас украли кое-что прекрасное, а мы не ощущаем его отсутствия. Ведь кража произошла, когда мы еще не родились. Вообразите, что по какой-то грандиозной исторической причине все мы убеждены, будто музыка — тупое, скучное, нетворческое

* Перифраз слов Сезара Круза: «Искусство должно утешать расстроенных и беспокоить утешенных» (1997). В свою очередь, это вариация высказывания Финли Данна: «Дело газеты — утешать огорченных и огорчать утешенных» (1902). *Прим. перев.*

Купить книгу на сайте kniga.biz.ua >>>

занятие, от которого нужно держаться подальше, за исключением самых необходимых случаев. Предположим, все мы в юности учились ей больше десяти лет и из-за неких проявлений яркого садизма со стороны преподавателей окончили этот курс с твердым убеждением, что музыка — не более чем средство для достижения цели. Мы можем согласиться, что каждому следует в общих чертах знать предмет, но только из соображений практичности: музыка вам нужна, поскольку она может — редко — помочь вам *в чем-то другом*. Все были бы убеждены, что музыка больше напоминает работу водопроводчика, а не вид искусства.

Мир был бы по-прежнему полон творческих людей. Так же, как и сейчас. Под творческими личностями я подразумеваю не обязательно учеников школы искусств, или профессиональных художников, или парня, который написал что-то на унитазе и выставил в музее. Я имею в виду людей, которые создают вещи, доставая их из небытия; тех, кто не отказывает себе в праве быть собой; у кого есть свой путь ломки реальности, настолько подлинный, что вы можете ощутить это своими нервными окончаниями; кто входит в мир горящим и слишком часто умирает молодым. «Музыка не для них, — соглашаемся мы. — Музыка для бухгалтеров среди нас, и лучше всего, если мы оставим ее им». Какой бы надуманной ни казалась ситуация, ровно это произошло с математикой. Ее у нас украли, и сейчас самое время вернуть ее обратно.

В этой книге я защищаю процесс концептуального поджога. Состояние преподавания математики во всем мире упало до уровня, когда уже бессмысленно что-то менять. Нужно все сжечь и начать заново. Приступим прямо сейчас. В этой книге к математике подходят не как к предмету, который был создан и существовал до вас, а теперь его нужно вам объяснить. Начиная с этой страницы ее не существует. Мы сами изобретем ее с основ, без старого багажа мудреных обозначений и напыщенной терминологии, которая бродит по всем учебникам. Традиционные термины будут упоминаться и использоваться, когда в этом есть смысл, но математическая Вселенная, которую мы создаем, наша собственная, и принятые обозначения туда не допускаются, пока мы открыто не пригласим их.

Купить книгу на сайте kniga.biz.ua >>>

Мы применим подход, который не требует зазубривания, побуждает к экспериментам и неудачам, не просит читателя принять то, чего мы не создали сами, избегает вычурных названий, которые скрывают простоту идей, и представляет математику как приключение (а она такая и есть), в разговорной форме. Книгу легко читать, как будто это роман. Основная цель нашего путешествия — удовольствие, а не практичность, но мы рады констатировать, что между ними нет никакого конфликта. Вы действительно изучите предмет — многое из него, — причем хорошо.

Если пытаться создать изложение математики, которое не требует от читателя принять факты, установленные ранее, невозможно не вспомнить о том, что я считаю фундаментальной трагедией нынешней математической педагогики. И она никогда не упоминается, даже при самой жесткой критике традиционного образования: *мы преподаем предмет задом наперед.*

Расскажу историю, которая покажет, что я имею в виду. У меня была тройка по начальной алгебре. Все, чему я научился, — ненавидеть слово «полиномиальный». У меня была тройка по тригонометрии. Все, чему я научился, — ненавидеть слова «синус», «косинус» и «гипотенуза». Математика была исключительно запоминанием, скукой и деспотичной властью, а уж это-то я люблю меньше всего. К выпускному классу школы я прошел все необходимые курсы. Не могу даже описать, насколько я был счастлив, что теперь можно до конца жизни не заходить в математический кабинет. Наконец-то свободен.

Однажды вечером в последний год учебы я, как обычно, бродил по книжному магазину и увидел книгу по математическому анализу. Я всегда слышал, что он очень труден, но у меня не было курса по анализу и не должно было быть… какое облегчение. Отсутствие обязательства изучать предмет почему-то делало книгу более привлекательной, и я подумал, что стоит полистать ее несколько секунд. Я ожидал увидеть какие-то ужасные символы, подумать: «Ну, это действительно сложно», — а затем поставить книгу на полку и закончить с этим навсегда. Но когда я открыл ее, там не было

Купить книгу на сайте kniga.biz.ua >>>

обычного мусора. Простым и незамысловатым языком автор говорил примерно так: с прямыми гораздо проще, чем с кривыми, но если вы достаточно увеличите масштаб, то любой маленький кусочек кривой выглядит почти как прямая. Поэтому каждый раз, когда у вас есть задача о кривой, мысленно увеличивайте ее до тех пор, пока она не станет выглядеть как прямая, решите проблему на микроскопическом уровне там, где это просто сделать, а затем вернитесь к первоначальному масштабу. Вы нашли ответ.

Это понятно любому и применимо не только к математике. Если у вас сложная задача, разбейте ее на несколько маленьких, решите их, а потом соберите вместе. Здесь есть изящество и необходимость, чего я никогда не чувствовал на уроках математики. Я еще немного полистал книгу и, когда увидел, что там есть раздел, где автор жалуется на то, как обычно преподают математику, я понял, что у нас с этим парнем много общего.

Я купил книгу и начинал читать ее всякий раз, когда мне было нечего делать. Мне нравилось, как пишет автор. У меня появилось лишнее оправдание тому, что мне никогда не нравилась математика в школе, и в то же время я убеждался, что ошибался по сути. Я не планировал изучать математический анализ и не помнил необходимых предварительных сведений из школы, так что я даже не знал, как решать «простые задачи» на микроскопическом уровне. Но это не проблема: у меня не было ограничений, накладываемых формальным образованием, и некому было наказывать меня, если я что-то делал неверно.

Так началось мое странное путешествие в анализ — до того, как я познакомился с алгеброй, тригонометрией, логарифмом и кучей всего, что вроде бы нужно изучить до анализа. Я купил тетрадь и стал разбираться. Каждый раз, когда я чего-то не понимал, я рисовал картинку и пытался убедить себя, что она правильная. Обычно я терпел фиаско.

Как ни странно, понятия анализа были самыми простыми частями этой книги. Намного труднее оказались так называемые необходимые предварительные области: алгебра, тригонометрия и прочий умозрительный упаковочный пенополистирол, которым набиты современные школьные

Купить книгу на сайте kniga.biz.ua >>>

курсы. Мысль об увеличении масштаба приобрела для меня смысл: производные и интегралы было не только просто вычислять, но и легко понять исходя из основных принципов. Путь от их «доматематической» мотивировки к определениям и далее к методам вычисления казался логичным и обоснованным, он связывал все воедино. Но изредка приходилось обращаться к тому, что считалось «базой», — и это я не мог понять совсем, хотя и помнил смутно, что слышал от какого-то учителя на тихом скучном уроке. Я не мог додуматься, откуда взялись все эти, казалось бы, простые штуки вроде площади круга или необъясненных «тригонометрических тождеств».

К счастью, меня никто не заставлял запоминать все это, так что я изучал фрагменты анализа, не трогая алгебру и тригонометрию. Я читал что-нибудь в книге, неплохо понимал, а затем терялся, потому что не помнил, как складывать дроби. В случаях вроде этого достаточно было пялиться некоторое время на проблемное место, чтобы наконец понять: «О, да они просто дважды умножают на 1. Как будто *лгут*, чтобы сделать задачу проще, а потом *делают поправку на ложь*, чтобы не получить неверный ответ. Интересно…» Другие трюки были не так просты, чтобы их можно было легко раскусить, просто поглядев на них, и они ставили меня в тупик. Логарифмы, синус и косинус, «формула корней квадратного уравнения» и «дополнение до полного квадрата» не входили в мой лексикон, и сами термины ощущались как похмелье от моего отрицательного опыта с математикой в школе.

Немного продвинувшись в анализе, я по-прежнему не разбирался в «предварительных областях», но начал замечать занятное. Я понял, что производная объема сферы равна площади ее поверхности, а производная площади круга — длине окружности. У меня все еще не было идей, откуда взялись сами формулы площади и объема, но таинственная операция «увеличения масштаба» предполагала, что они как-то связаны. Так я впервые столкнулся со странным фактом о математике: мы можем быть в полном тупике по двум разным вопросам и не иметь прогресса по ним в отдельности, но умудриться четко продемонстрировать, что ответ *один и тот же*, даже не зная, каков он. Этот факт, который поначалу выглядит

Купить книгу на сайте kniga.biz.ua >>>

как черная магия, — фундаментальная особенность абстрактной математики на всех уровнях. Это явно не та тупая авторитарность, которая действовала мне на нервы в школе.

Когда пришло время моего первого года в колледже, я совершил немыслимое: решил пройти курс анализа. Я, всегда ненавидевший математику всеми фибрами, из-за случая в книжном магазине ради развлечения взял курс анализа 1. Потом курс анализа 2. Потом мой профессор предложил, чтобы я на второй год взял курс математики уровня выпускника. Я сказал ему, что ничего не знаю и что он сошел с ума. Но я прошел курс и получил высшую оценку. К окончанию колледжа кафедра математики вручила мне одну из тех памятных табличек, на которых пишут что-то вроде: «Поздравляем лучшего студента по математике в нашей истории». Подчеркну: у меня нет врожденного математического таланта и ничто за 13 лет изучения дисциплины до университета не наталкивало на мысль, что я найду удовольствие в этом предмете. В любой системе образования, в которой возможна описанная последовательность событий, что-то идет ужасно неправильно.

В итоге на уроке математике — моем заклятом враге в школе — я чувствовал себя как дома*. После колледжа я собрался поступать в аспирантуру по математической физике в Университете Альберты. Летом после первого курса, следуя своему жизненному принципу заниматься чем угодно, но не тем, что требуется, я увлекся психологией и нейробиологией. В итоге я подал заявление на программы в этой области, чудом оказался принятым, оставил программу по матфизике с магистерской степенью и сейчас живу в Санта-Барбаре, изучаю мозг и поведение с помощью математики. В первый год в магистратуре факультета психологии и наук о мозге я встречал много весьма умных студентов, которые испытывали тот же неоправданный страх перед математикой, что преследовал меня в школе. Каждый раз,

* Мне повезло, что в колледже были изумительные преподаватели, — особенно запомнились Рикки и Викки Клима, Эрик Марланд и Джефф Херст. Встречались и другие чудесные учителя, но эти четверо заслуживают особой благодарности за невероятную отзывчивость и за то, что терпели, когда я врывался к ним в кабинеты с диковинными вопросами, не связанными ни с каким курсом.

Купить книгу на сайте kniga.biz.ua >>>

когда я вижу испуг в чьих-то глазах при упоминании высшей математики, мне хочется рассказать им, что весь их опыт с этим предметом ложен. Кажущаяся трудность предмета — целиком проблема того, как нам ее преподают, и я сам оценивал себя по этому стандарту. Если в этой книге найдется то, что вы систематически пытались понять, но не смогли, то это *моя* вина, а не ваша. Базовые идеи крайне просты. Абсолютно все. Гарантирую.

В первый мой год в Санта-Барбаре я невольно задумывался, что можно было бы существенно ускорить исследования в любых научных областях, если бы все специалисты этих отраслей лучше знали математику. Я не имею в виду «в их головах было бы больше математических фактов». Речь о том, что они «были бы хорошо обучены абстрактному мышлению». И, что еще хуже, я вполне уверен, что 9 человек из 10 имеют больше «врожденных способностей» к математике, чем я (что бы под этим ни подразумевалось). И я знаю о ней больше, чем мои сокурсники, только благодаря случайному происшествию в книжном магазине, привлекшему меня к предмету, симпатии к которому я до того времени не ощущал.

Сейчас лето, и я пишу эту книгу для всех, кто когда-нибудь ненавидел математику. Не только для молодых и разочарованных, а для всех ученых, которые втайне относятся к математике как к тошнотворному, но необходимому профессиональному требованию; они добросовестно терпят ее, но никогда не чувствовали огня, анархии и гедонистического удовольствия от предмета. Если я не провалюсь с треском, мы обнаружим много занятного*. Но я должен подчеркнуть, что это не очередная надоедливая попытка «сделать математику веселее», которая обычно означает размазывание тонкого слоя глупых лиц и плохих шуток поверх старого доброго подхода. Это слабенькое улучшение стандартных учебников, и такие книги никогда не преподносят предмет так, как он должен даваться

* Вышеуказанное предложение (разумеется) написано автором этой книги, весьма пристрастным источником, мнению которого по поводу его работы доверять не стоит. Но если применить тот же принцип к предыдущему предложению, мы получим, что следует не доверять самому недоверию. Похоже, мы в тупике. Думайте что хотите.

Купить книгу на сайте kniga.biz.ua >>>

на мой взгляд: четкие указания на все, что субъективно и необоснованно; что выглядит так, как есть, поскольку кто-то пытался добиться причудливого звучания (осознанно или нет); отделение исторических случайностей от неподвластных времени процессов рассуждений; подтверждение оправданного презрения большинства студентов на уроках математики, где они, по сути, высмеивают способы преподавания предмета; и главное: *задом наперед*. Предмет в том виде, как он обычно представлен в нынешних образовательных учреждениях, не способен вынести ни один творческий самостоятельно мыслящий человек. Книги, которые пытаются исправить этот фундаментальный порок, с названиями вроде «Прикольные функции и их потрясающие графики», упускают бóльшую часть причин, по которым так много учащихся считает предмет чужим*. Но сама математика, если ее очистить от лишнего, претенциозного и представить добросовестно и максимально по-человечески, несомненно, одно из самых красивых открытий нашего биологического вида. Это форма научного искусства, которую не нужно оправдывать тем, что она «полезная», хотя ее изучение — одно из самых плодотворных дел в мире.

В каждый момент нашего путешествия я буду сосредоточиваться на идеях, которые, на мой взгляд, имеют большую концептуальную важность, независимо от того, дают ли их обычно в одном курсе. Мы начнем с самых основ, но со временем приступим к изучению тем, которые преподают на последних курсах четырехлетней математической программы. Если и есть книга, которая ведет от сложения и умножения к анализу в бесконечномерных пространствах, я никогда ее не видел. И я надеюсь показать вам, что такой подход не настолько бредов, как кажется.

На каждой стадии, прежде чем демонстрировать вам какие-то идеи, я стараюсь пропускать их через мысленную центрифугу. Обычно в курсе любого предмета дается путаная смесь важного со случайным, которая скрывает простоту базовых идей даже от самых внимательных учащихся.

---

* Честно говоря, это название главы из очень хорошо написанной книги. Марк Райан, я был бы рад однажды встретиться лично. Вы невероятный преподаватель.

Купить книгу на сайте kniga.biz.ua >>>

Я всегда хотел, чтобы преподаватели тратили намного больше времени на разделение этой смеси на составные части *до* написания учебников и чтения лекций. Я пытался сделать это в своей книге, для примера посмотрите первые несколько страниц главы 4. Также обратите внимание, что круги впервые появляются у нас намного позже того, как мы изобретем анализ. Так и должно быть; до этого они сбивают с толку.

Вот пример, как по-разному мы делаем дело. Одна из немногих штук, которые я помню со школы, — теорема Пифагора. Но я не знаю, почему она верна, не знаю, почему нас это должно волновать, и мне не нравится это вычурное название. Мы избежим всех трех проблем так: я буду использовать термин «кратчайший путь» вместо «гипотенуза», придумаю более описательный термин, чем «теорема Пифагора», предложу самое простое объяснение из тех, что знаю, почему она верна (все займет 30 секунд), и, как только мы изобретем ее для себя, я покажу простой вывод того факта, что время замедляется, когда вы двигаетесь*. Это следует из специальной теории относительности Эйнштейна, но объяснение не требует математических идей сложнее теоремы Пифагора, и вы сможете полностью понять рассуждение. При этом вывод выглядит удивительно. Причем для любого, и неважно, как долго вы всё это уже знаете! Учитывая, что рассуждение понятно, как только мы придумаем формулу для кратчайшего пути (ранее — теорема Пифагора), настоящей трагедией становится тот факт, что его не включают в обязательный школьный курс геометрии. Надо бы звонить в колокола, бросать конфетти и начинать объяснять это вам за пять секунд после изучения теоремы Пифагора. Но почему-то так не делают. А мы сделаем**.

Эта книга нарушает множество соглашений и кучу правил, вероятно, даже слишком много. Ни один метод обучения не подойдет всем сразу,

* Точнее, всякий раз, когда два объекта движутся в разных направлениях или с разными скоростями, их «часы» начинают идти по-разному. Но это не просто факт о часах. Это физическое свойство самого времени. Вселенная безумна. Подробности позже!

** Придется самим поискать колокола и конфетти. Не скажу, что не рад бы вам помочь; но, вероятно, я сейчас не там же, где и вы.

Купить книгу на сайте kniga.biz.ua >>>

и я точно не претендую ни на то, что эта книга станет *универсальным* лекарством от болезней математического образования, ни на то, что она *гарантированно* подойдет любому. Если ее подход неэффективен для вас, пожалуйста, отложите ее и найдите то, что будет работать. Ваше время ценно, и вам не стоит тратить его на попытки продраться сквозь книгу, которая вам не по вкусу. Она была написана для души, целиком ради развлечения, а не как часть работы. В идеале ее и читать следует из тех же соображений.

И не важно, вносит ли этот эксперимент свой вклад в вечные ценности или нет. В образовании необходимы радикальные перемены. Пока все выглядит так, будто наши учебные заведения на всех уровнях — от начальной школы до докторантуры и даже стилевых требований академических журналов — призваны вызвать что-то вроде обратного стокгольмского синдрома, заставляя нас ругать то, что мы вполне могли бы любить. Учащиеся, оканчивающие школы и вузы, утомлены самыми умопомрачительными вещами, которые были открыты человечеством. Если они думают, что математика, физика, эволюционная биология, молекулярная биология, нейробиология, информатика, психология, экономика и другие области исследований скучны и неинтересны, это не их вина. Это вина системы образования, которая блестяще подходит для того, чтобы наказывать творческие способности; системы, в которой учат, как правильно писать слова, а не как думать, не одурачивая себя, что мы все неизбежно делаем; системы, в которой уравниваются законы природы и произвольные правила вроде запрета предлогов в конце предложения — как если бы и то и другое было равно обоснованным описанием Метода Устройства Мира; системы, в которой люди обязаны проводить большую часть своей молодости. Для них и для всех вас, у кого был такой опыт, эта книга — мое извинение.

Купить книгу на сайте kniga.biz.ua >>>