

РОЗДІЛ 8

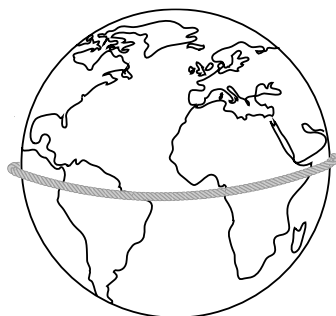
3,141592653589

Магія числа π

Навколо кола

Попередній розділ ми розпочали з перевірки вашої геометричної інтуїції. Спочатку згадали прямокутник, потім трикутник і закінчили футбольним полем. А тепер час поговорити про коло. Проте ми не обмежуватимемося якимись там футбольними полями, а обмотаємо канатом одразу всю Землю!

Запитання 1. Уявіть собі довжелезний канат, яким ми зможемо оперезати всю Землю по екватору (а це приблизно 40 076 км). Для того щоб було цікавіше, подовжимо канат на 3 м. Якщо у нас буде можливість рівномірно підняти цей канат над Землею на однакову висоту, якою виявиться ця висота?



Варіанти відповіді:

- А) Трохи більше від кількох сантиметрів.
- Б) Досить високо, щоб людина могла проповзти під цим канатом.

[Купити книгу на сайті kniga.biz.ua >>>](http://kniga.biz.ua)

В) Досить високо, щоб людина мала змогу пройти під цим канатом у повний зріст.

Г) Досить високо, щоб під цим канатом змогла проїхати вантажівка.

Запитання 2. Маємо на колі точки X і Y , які утворюють дві дуги: велику та малу, як показано на рисунку нижче. Де на великій дузі розмістити точку Z , щоб кут $\angle XZY$ був найбільшим?

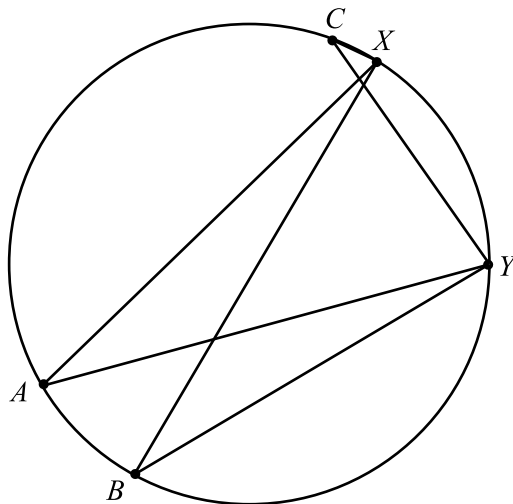
Варіанти відповіді:

А) У точці A (точно навпроти середини відрізка XY).

Б) У точці B (симетрично точці X на лінії, що проходить через центр кола).

В) У точці C (максимально близько до точки X).

Г) Де завгодно, адже всі ці кути будуть однаковими.



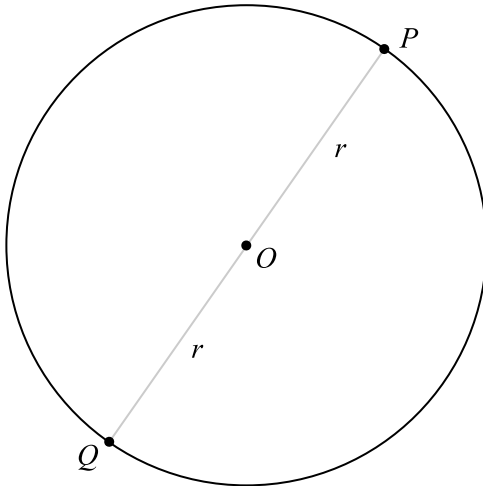
Яка з точок на великій дузі між точками X та Y дасть найбільшу величину кута? Це буде кут $\angle XAY$, $\angle XBY$ чи $\angle XCY$? А можливо, усі ці кути рівні?

Щоб відповісти на це запитання, потрібно дещо поглибити наші знання з геометрії кола. Втім, якщо вам не цікаво, можете просто подивитися відповідь. У випадку з першим запитанням — Б), з другим — Г). Але хіба ж так цікаво? Краще зупинімося детальніше на особливостях геометрії кола.

Будь-яке коло можна описати, вказавши положення його центра O та додатну величину — радіус r . Точка O рівновіддалена від усіх точок на колі, і відстань ця завжди дорівнює r . Точку O називають *центром* кола. Відстань r — це *радіус* кола. Радіусом також називають будь-який відрізок OP , проведений від центра кола O до точки P , що лежить на цьому колі.

Довжина кола і площа круга

Діаметр кола D — максимально можлива відстань між двома точками на ньому; вона дорівнює подвійному радіусу кола, тобто $D = 2r$.



Коло з центром у точці O , радіусом r та діаметром $D = 2r$

Довжина кола, або його периметр, позначається літерою C . Дивлячись на рисунок, можна помітити, що величина C більша, ніж $2D$. І це не дивно, адже одна справа вирушити з точки P і повернутися назад, рухаючись по прямій лінії, а зовсім інша — йдучи по колу. Отже, висновок такий: $C > 2D$. А якщо на те пішло, то довжина C буде навіть трохи більшою за $3D$. Проте, щоб у цьому переконатися, знадобляться $3D$ -окуляри. Жартую.

Щоб зіставити довжину кола з довжиною його діаметра, потрібно розпрямити коло, виміряти довжину отриманого відрізка і розділити її на величину діаметра. І, як не дивно, немає різниці, якого розміру буде коло — чи то з монетки, чи то з диск Сонця, результат буде завжди однаковим:

$$C/D \approx 3,14.$$

Ось ми і знайшли число π (читається як «пі»). Це число — константа, тобто воно стало, незмінне. І дорівнює відношенню довжини кола до його діаметра:

$$\pi = C/D.$$

А тепер, знаючи діаметр чи радіус, можемо знайти довжину кола:

$$C = \pi D, C = 2\pi r.$$

Число π має значення

$$\pi = 3,14159\dots$$

Про знаки після дев'ятого поговоримо дещо пізніше, а водночас згадаємо деякі цікаві властивості цього неймовірного числа.

✂ Додаток

Визначити «на око» довжину кола не так і просто. Можете себе перевірити. Візьміть високу склянку і подумайте, що буде більшим — її висота чи довжина кола? Більшість людей скажуть, що висота. Але, швидше за все, це буде помилкою. Важко в це повірити, чи не так? Але ми можемо доволі легко дізнатися правду. Виміряйте діаметр склянки пальцем і тричі прикладіть цей палець до її висоти. Пам'ятаєте, що довжина кола трохи більша за три діаметри?

Тепер у нас є можливість дати відповідь на перші два запитання, поставлені на початку розділу. Якщо уявити собі екватор як ідеальне коло довжиною 40 076 км, то його радіус становитиме:

$$r = \frac{C}{2\pi} = \frac{40\,076}{6,28} \approx 6381 \text{ км.}$$

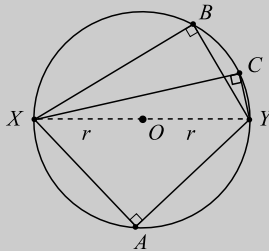
Але саме значення радіуса для нас не таке важливе. Значно важливіше дізнатись, на яку величину радіус збільшився. Відповідь приблизно така: $3/2\pi \approx 0,5$ м. Цієї висоти більш ніж достатньо, щоб під канатом легко могла проповзти людина.

Але найцікавіше у цьому факті те, що отримані нами 0,5 м аніскільки не залежать від довжини кола. Аналогічний результат буде, якщо ви обмотаєте канатом і увесь Юпітер, і тенісний м'яч. Наприклад, радіус кола довжиною 15 м становить $15/2\pi \approx 2,39$ м. Якщо додати ще 3 м, отримаємо новий радіус $18/2\pi \approx 2,87$ м. Різниця становить близько 0,5 м.

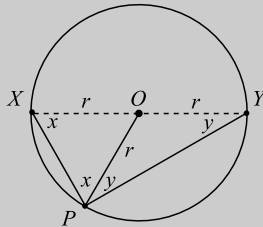
✂ **Додаток**

Варто нагадати про існування ще одного важливого факту стосовно геометрії кола.

Теорема. Нехай на колі з центром O лежать точки X та Y , розміщені точно одна навпроти одної. Де б на колі ми не розмістили точку P , вона завжди утворюватиме прямий кут $\angle XPY$. На рисунку нижче кути $\angle XAY$, $\angle XBY$ та $\angle XCY$ є прямими.



Доведення. Проведемо радіус із точки O в точку P . Нехай $\angle XPO = x$, а $\angle YPO = y$. Тож спробуємо довести, що $x + y = 90^\circ$.

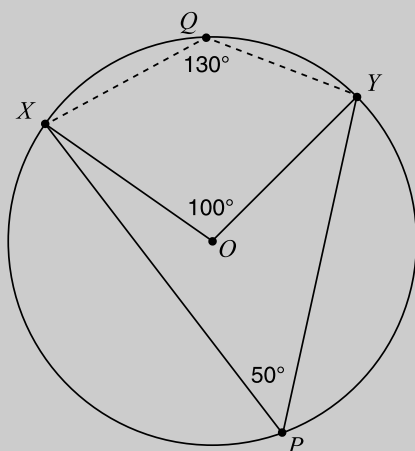


(продовження на наступній сторінці)

✂ Додаток (продовження)

Оскільки відрізки $|OX|$ та $|OP|$ є радіусами довжиною r , трикутник XPO рівнобедрений. Виходячи з теореми про рівнобедрені трикутники, $\angle OXP = \angle XPO = x$. За цією ж логікою, відрізок $|OY|$ також є радіусом r , відповідно, $\angle OYP = \angle YPO = y$. А знаючи, що сума всіх кутів трикутника XYP дорівнює 180° , робимо висновок, що $2x + 2y = 180^\circ$. Отже, $x + y = 90^\circ$, що і треба було довести.

Ця теорема є частиною іншої, моєї ☺ улюбленої, вона стосується центрального кута; про неї мова піде у наступному додатку. Щоб знайти відповідь на друге з поставлених на початку розділу запитань, доведеться звернутись до *теореми про центральний кут*. Розмістимо у довільних місцях на колі дві точки X та Y . У результаті отримаємо дві дуги, одну більшу, другу меншу. Теорема стверджує, що де б ви не розмістили точку P на великій дузі, величина кута $\angle XPY$ завжди буде незмінною. Якщо конкретніше, то він дорівнюватиме рівно *половині центрального кута* $\angle XOY$. Якщо ж розмістити на меншій дузі точку Q , отримаємо кут $\angle XQY = 180^\circ - \angle XPY$.



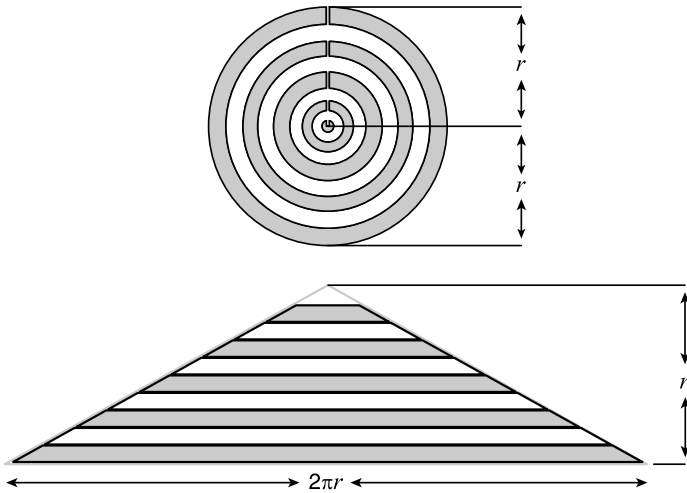
Наприклад, якщо $\angle XOY = 100^\circ$, то де б ви не розмістили точку P на великій дузі, величина кута $\angle XPY$ завжди дорівнюватиме 50° . І, відповідно, за будь-якого положення точки Q на меншій дузі, $\angle XQY = 130^\circ$.

Якщо ми знаємо довжину кола, то можемо вивести формулу, яка дасть змогу знайти площу круга.

Теорема. Площа круга радіусом r дорівнює πr^2 .

Я більше ніж переконаний, що цю формулу ви пам'ятаєте ще зі школи. То й добре, тоді вам ще цікавіше буде дізнатися, звідки вона взялася. Тому приготуйтеся, я підібрав для вас кілька цікавих доведень цієї теореми.

Доведення 1. Уявіть коло, повністю розкреслене кільцями, як показано на рисунку. Напружте свою уяву і зробіть таке: розріжте ці кільця зверху до центра і розкладіть їх у фігуру, що нагадуватиме трикутник. Як знайти площу трикутника, ви вже знаєте.



Площа круга радіусом r дорівнює πr^2

А якщо забули, то нагадаю, що площа трикутника з основою b та висотою h дорівнює $\frac{1}{2}bh$. Тепер давайте перейдемо безпосередньо до нашого трикутника. Його основа має довжину $2\pi r$, а висота — r . Отже, формула площі цього трикутника така:

$$\frac{1}{2} bh = \frac{1}{2} (2\pi r)(r) = \pi r^2 .$$

що ми і мали довести.

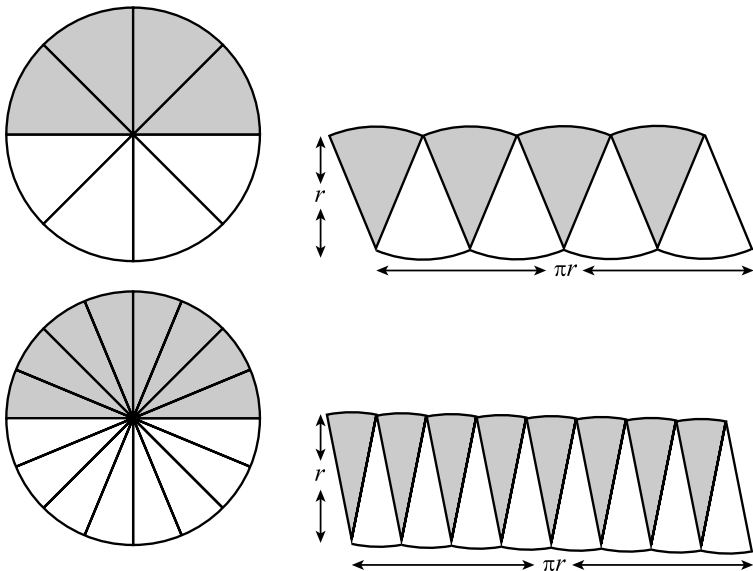


Мені ця теорема так подобається, що я не можу втриматись, щоб не навести ще один спосіб її доведення. Але якщо минулого разу ми «чистили цибулину», то цього разу «розрізатимемо піцу».

Доведення 2. Розділимо коло на парну кількість шматочків. Візьмемо один шматочок із верхньої половинки і покладемо поряд із шматочком із нижньої, як показано на рисунку нижче. (У наведеному прикладі я розрізав «піцу» спочатку на 8, а потім на 16 шматочків.) І так розкладемо всі шматки «піци». Тож чим більше буде шматочків, тим більше вони нагадуватимуть трикутник з висотою r . Чорні шматочки для наочності назвемо сталакитами, а білі — сталагмітами. Складені в ряд шматочки нагадують паралелограм. Але якщо відрізати половинку від одного краю і докласти до іншого, отримаємо прямокутник, одна сторона якого дорівнює r , а друга — πr . Оскільки зі зростанням кількості секторів розрізане коло дедалі більше нагадуватиме прямокутник, формула його площі буде такою:

$$bh = (\pi r)(r) = \pi r^2,$$

що і потрібно було довести.

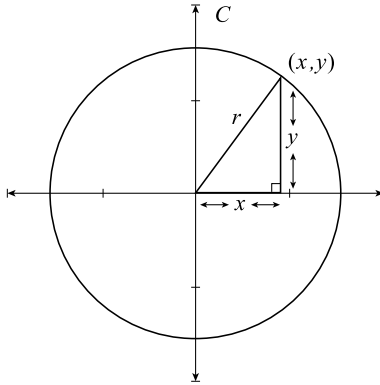


Ще одне доведення формули площі круга за допомогою способу «піца-пі»

Часто виникає потреба накреслити графік кола на координатній площині. Рівняння, яке описує коло радіусом r з центром у початку координат $(0, 0)$, має такий вигляд:

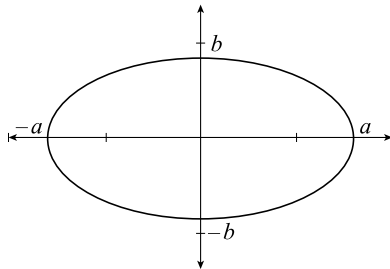
$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Це добре видно на графіку, зображеному нижче. Щоб зрозуміти, чому ця формула правильна, візьмемо на колі довільну точку з координатами (x, y) . Опустимо від неї перпендикуляр до осі X і в результаті отримаємо прямокутний трикутник із катетами x та y і гіпотенузою r . Тоді з теореми Піфагора отримаємо, що $x^2 + y^2 = r^2$.



Коло радіусом r з центром у точці $(0, 0)$ описується рівнянням $x^2 + y^2 = r^2$.
Площа круга, обмеженого таким колом, дорівнює πr^2

Коло, радіус якого дорівнює одиниці, називають *одичним*. Якщо ми «розтягнемо» коло по горизонталі з коефіцієнтом a і по вертикалі з коефіцієнтом b , отримаємо еліпс (див. рисунок нижче).



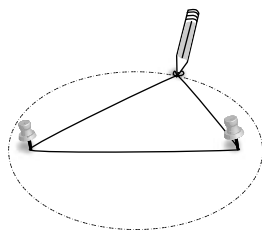
Площа цього еліпса дорівнює πab

До речі, ця фігура описується рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

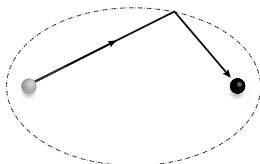
а її площа дорівнює πab . Звідки взялася така формула площі? Площа звичайного одиничного круга дорівнює π . Але ж ви пам'ятаєте, що ми його трохи розтягнули? Якщо говорити точніше, то не трохи, а на величину ab . Також зверніть увагу, що за умови $a = b = r$ отримуємо круг радіусом r . А πab у такому разі органічно перетворюється на πr^2 .

Взагалі, оскільки ми згадали таку геометричну фігуру, як еліпс, то я не можу не навести вам кілька цікавих фактів про нього. Наприклад: красивий еліпс ви можете намалювати лише за допомогою олівця, двох канцелярських кнопок та нитки, як показано на рисунку нижче.



Місце розташування цих кнопок у математиці називають *фокусами* еліпса, і, як ви вже, мабуть, здогадалися, ці фокуси магічні.

Якщо замість кнопки в один із фокусів покласти більярдну кулю і вдарити по ній, то, відскочивши від межі еліпса, куля обов'язково влучить у інший фокус.



А ось іще один цікавий факт — космічні тіла, такі як, комети та планети, рухаються навколо Сонця по орбітах еліптичної форми.

✂ Додаток

Цікаво, що немає простої формули для обчислення довжини еліпса. Натомість є лише наближена формула, яку розробив математик Срініваса Рамануджан. Вона дає змогу отримати приблизне значення довжини еліпса і має такий вигляд:

$$\pi(3a + 3b - \sqrt{(3a + b)(3b + a)}).$$

Зверніть увагу на той факт, що при $a = b = r$ вираз спрощується до формули довжини кола:

$$\pi(6r - \sqrt{16r^2}) = 2\pi r$$

До речі, число π зустрічається і в тривимірних об'єктах. Візьмемо, наприклад, консервну банку. Будь-який математик скаже, що вона має форму *циліндра*. Здогадаєтесь, чому дорівнює об'єм циліндра радіусом r та висотою h ?

$$V_{\text{циліндра}} = \pi r^2 h$$

Пояснити походження цієї формули доволі просто. Уявіть собі циліндр як сукупність плоских кіл, розташованих одне над одним. Висота купи цих кіл дорівнює h .

А як обчислити *площу поверхні* циліндра? Іншими словами, яку площу доведеться покрити фарбою, щоб пофарбувати весь циліндр із верхньою і нижньою основами включно? Простіше за все умовно розділити циліндр на три частини. Площа однієї основи дорівнює πr^2 . Тож їхня сукупна площа становить $2\pi r^2$. Щоб знайти площу третьої, бічної частини циліндра, розріжемо його по висоті h і отримаємо прямокутник. Параметри цього прямокутника будуть такими: висота — h , ширина — $2\pi r$ (дорівнює довжині кола основи). Отже, площа прямокутника становитиме $2\pi r h$. Таким чином, маємо можливість записати формулу площі поверхні циліндра:

$$S_{\text{циліндра}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Наступним тривимірним об'єктом, який ми розглянемо, буде *сфера*. Головна її властивість у тому, що всі точки, розташовані на

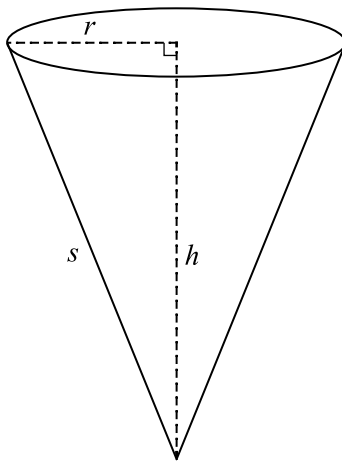
ній, рівновіддалені від центра. А чому дорівнюватиме об'єм кулі радіусом r ? Відповідь на запитання почнемо шукати з того факту, що така куля може поміститися всередині циліндра радіусом r і висотою $2r$. Отже, об'єм кулі має бути меншим за об'єм циліндра $\pi r^2(2r) = 2\pi r^3$. Так уже виходить (і це підтверджено математично), що куля завжди займає рівно дві третини об'єму циліндра. Тобто, маємо таку формулу:

$$V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Формула обчислення площі поверхні сфери значно простіша, хоча шлях до її виведення виявився зовсім не простим:

$$S_{\text{сфери}} = 4\pi r^2.$$

Пропоную смачно завершити цей розділ, розглянувши приклади, у яких число π з'являється в задачах про морозиво та піцу. Уявімо собі ріжок морозива висотою h та з верхнім колом радіусом r . Проведемо відрізок з вершини конуса до будь-якої точки на його колі та позначимо його літерою s . Знайти його довжину можна за допомогою теореми Піфагора: $h^2 + r^2 = s^2$.



Об'єм конуса дорівнює $\pi r^2 h/3$, а площа поверхні — $\pi r s$

[Купити книгу на сайті kniga.biz.ua >>>](http://kniga.biz.ua)

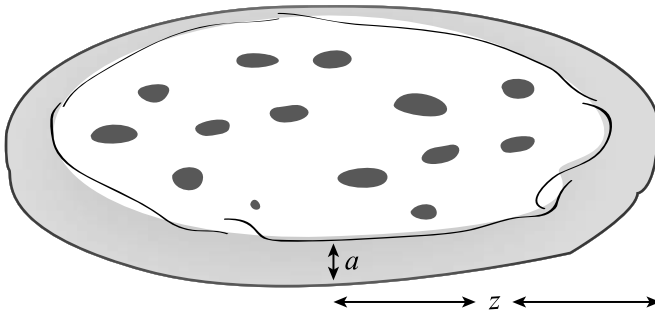
Цей конус можна розмістити всередині циліндра радіусом r та висотою h , тож неважко здогадатися, що об'єм конуса буде меншим за $\pi r^2 h$. А ось цікавий факт, про який ви, мабуть, і не здогадувалися. Об'єм конуса буде рівно втричі меншим за об'єм відповідного циліндра. Тож ми можемо записати таку формулу:

$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Формула для обчислення площі поверхні конуса взагалі дуже проста і зрозуміла:

$$S_{\text{конуса}} = \pi r s.$$

А тепер трохи поговоримо про піцу. Наша піца має радіус z і товщину a . Чи можемо обчислити її об'єм?



Чому дорівнює об'єм піци радіусом z та товщиною a ?

Фактично, піца становить собою циліндр, хоча й трохи незвичної форми. Отже, об'єм цього циліндра можна обчислити таким чином:

$$V = \pi z^2 a.$$

До речі, відповідь була у вас просто перед носом. Подивіться уважніше:

$$V = \pi z z a.$$